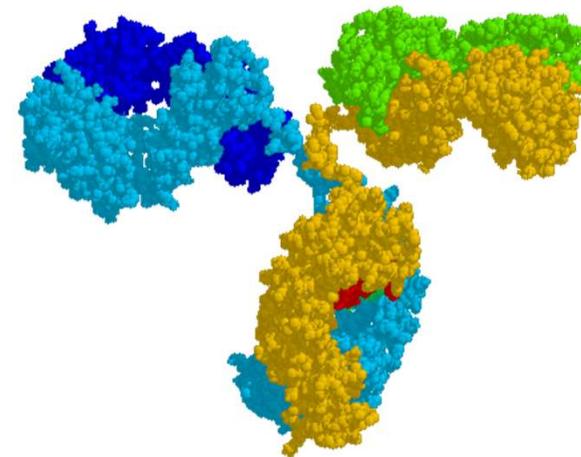
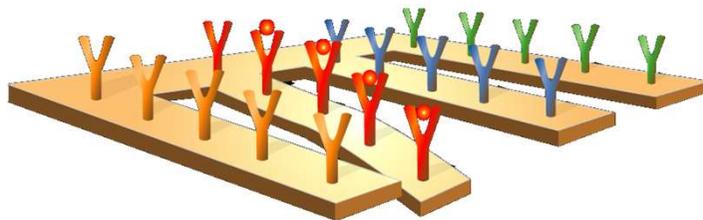


# Ciclo di lezioni sulla Doublet Mechanics (DM)

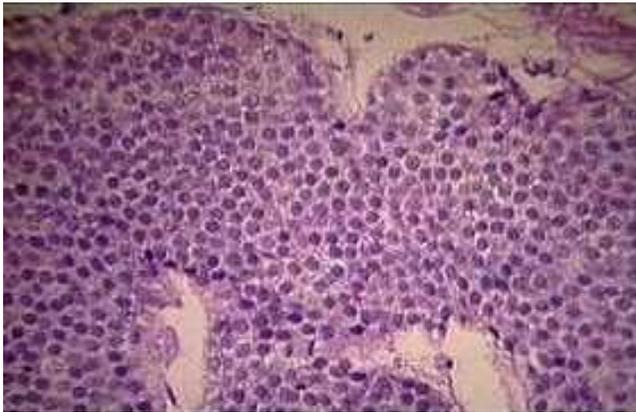
## Parte I *Background and Theoretical Fundamentals*

Esistono problemi - di natura tecnologica e scientifica - contraddistinti da domini irregolari, granulari, particellari.

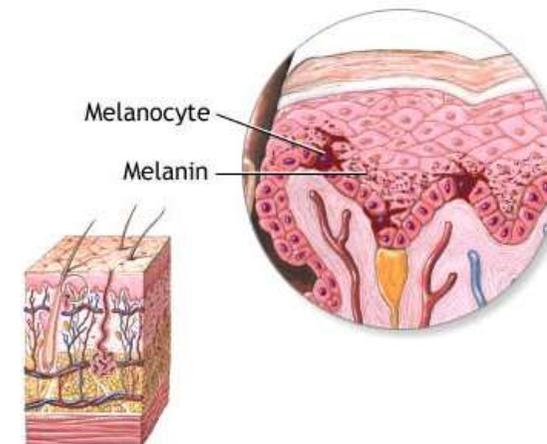
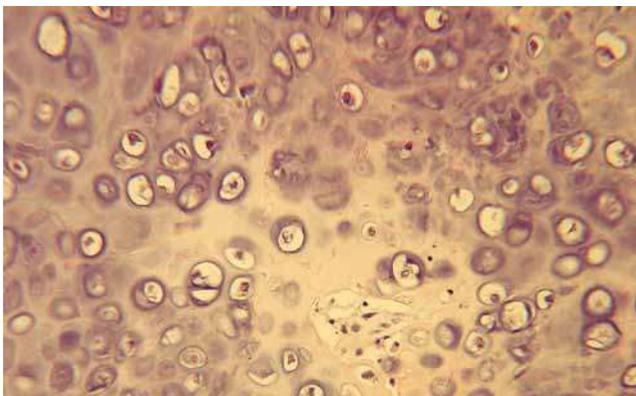
O che interessano corpi la cui dimensione caratteristica, in generale, risulta comparabile con quella dei loro grani costituenti.



- ⊕ NEMS - MEMS
- ⊕ GeoMeccanica
- ⊕ Biologia, BioIngegneria, BioNano Meccanica

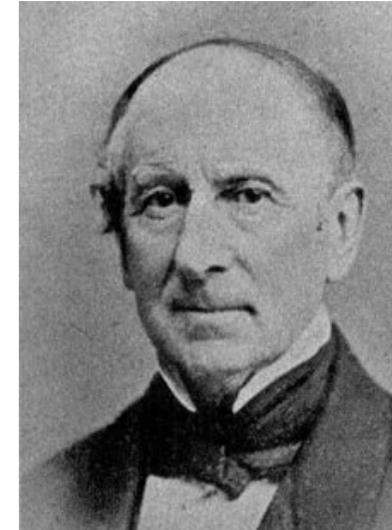


In particolare, i tessuti biologici presentano una evidente struttura **non continua** di cellule alternate a matrice extracellulare, con dimensioni che variano da qualche decina di **micron** (diametro di una cellula) a qualche **nanometro** (dimensione caratteristica dei recettori cellulari).



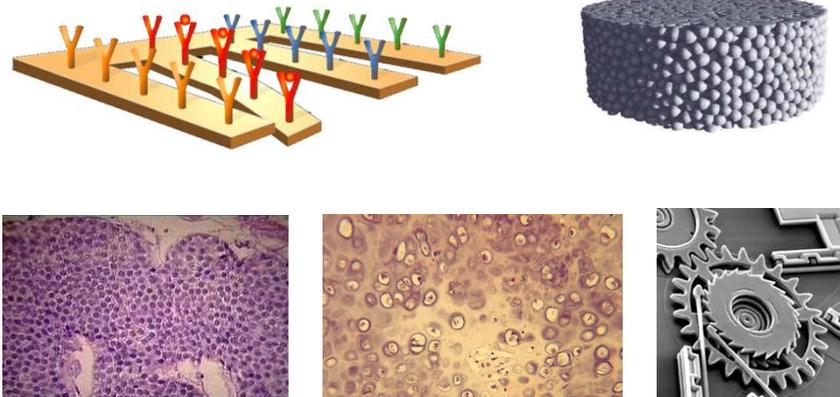
## Il continuo di Cauchy (1789 - 1857)

“Si consideri un mezzo continuo tridimensionale, che occupi un volume  $V$  e sia delimitato dalla superficie laterale  $S$ . Il mezzo è soggetto a particolari azioni meccaniche. Si consideri una porzione finita  $\Delta V$  di volume o  $\Delta S$  di superficie del mezzo; la quota parte di azioni meccaniche che interessa tale porzione può essere rappresentata dalla forza risultante  $\Delta R$  e dal momento risultante  $\Delta M$ . Il continuo di Cauchy è caratterizzato dall'ipotesi che esistano i limiti finiti:



$$\lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta R}{\Delta V} = F \quad \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta R}{\Delta S} = f \quad \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta M}{\Delta V} = 0 \quad \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta M}{\Delta S} = 0$$

Nelle definizioni fondamentali della *Scienza delle Costruzioni* è presente l'operatore di limite, che sottointende un mezzo *continuo*, che sia cioè divisibile un numero infinito di volte.



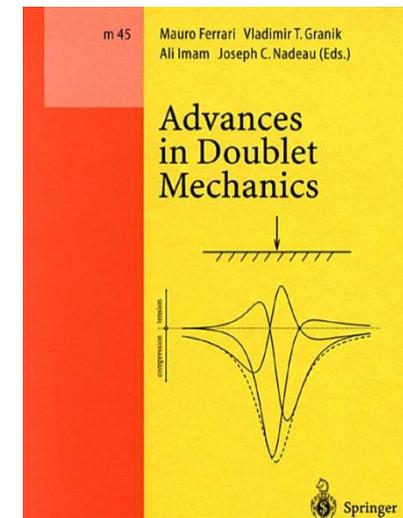
Per tutte queste situazioni, una teoria continua, come la *Meccanica Classica*, risulta dunque inadeguata.

Esistono già delle Teorie Discrete, ma:

- La Dinamica Reticolare (*Lattice Dynamics, LD*) è dedicata a problemi particolari, come la vibrazione degli atomi di strutture cristalline regolari, infinitamente estese e non caricate esternamente, e risulta inadatta a numerose situazioni reali.
- Le *MicroMeccaniche*, di tipo Differenziale o Integrale, hanno, d'altro canto, il difetto di prevedere un gran numero di costanti elastiche (che non possono essere determinate da un numero realistico di esperimenti), ovvero di essere molto difficili e, in pratica, in molti casi intrattabili.

Di qui la necessità della:

- ⊕ Formulazione di una teoria di scala e non locale (*non local and scale theory*): **Doublet Mechanics (DM)**<sup>I</sup>.
- ⊕ Costituisce un modello efficace per l'analisi di sistemi discreti, granulari, la cui dimensione caratteristica sia comparabile a quella dei grani costituenti.
- ⊕ Si configura come uno strumento efficace per l'analisi dei tessuti biologici.



<sup>I</sup> Si vedano, fra gli altri:

Ferrari M. et Al., *Advances in Doublet Mechanics*, Springer, 1997.

Ferrari M., Decuzzi P., Gentile F. et Al., *Nanomechanics and Tissue Pathology*, Encyclopedia Chapter in *BioMems and Biomedical Nanotechnology*, Springer, in press.

Let's do some math, ma prima: **(brevissimi) richiami di calcolo tensoriale.**



**Tullio Levi Civita, Gregorio Ricci-Curbastro,**  
*Méthodes de calcul differential absolu et*  
*leures applications, 1900.*

- ⊕ Un tensore è un ente matematico con degli invarianti (per cui può rappresentare delle grandezze fisiche).
- ⊕ Se si fa riferimento ad una terna cartesiana ortonormale (1,2,3), la notazione si semplifica notevolmente, fino a coincidere con l'algebra delle matrici.
- ⊕ Uno scalare sarà allora un tensore di ordine zero, un vettore un tensore di ordine uno, una matrice un tensore doppio (di ordine 2).

Per esempio,  $a_{ij}$  è composto da  $3 \times 3 = 9$  termini:

$$a_{ij} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Let's do some math, ma prima: (brevissimi) richiami di calcolo tensoriale.

- ⊕  $a_{ijkl}$  (un tensore del quarto ordine) è composto da  $3^4=81$  termini.
- ⊕ Importante è la convenzione degli indici ripetuti: all'interno di una espressione monomiale sui termini con gli stessi indici è sottintesa una sommatoria. Ad esempio:

$$a_i n_i = a_1 n_1 + a_2 n_2 + a_3 n_3 \quad \text{Il risultato è uno scalare. Ma questo era semplice...}$$

$$a_{ij} n_j = \begin{pmatrix} a_{11} n_1 + a_{12} n_2 + a_{13} n_3 \\ a_{21} n_1 + a_{22} n_2 + a_{23} n_3 \\ a_{31} n_1 + a_{32} n_2 + a_{33} n_3 \end{pmatrix} \quad \text{Il risultato è un vettore.}$$

$$\begin{aligned} a_{ij} n_{ij} &= a_{1j} n_{1j} + a_{2j} n_{2j} + a_{3j} n_{3j} = \\ &= a_{11} n_{11} + a_{12} n_{12} + a_{13} n_{13} + \\ &+ a_{21} n_{21} + a_{22} n_{22} + a_{23} n_{23} + \\ &+ a_{31} n_{31} + a_{32} n_{32} + a_{33} n_{33} \end{aligned} \quad \text{Il risultato è uno scalare. In generale, se in una espressione tensoriale tutti gli indici sono saturati, allora il risultato è sempre uno scalare. Altrimenti sarà un tensore di ordine pari al numero di indici non saturati.}$$

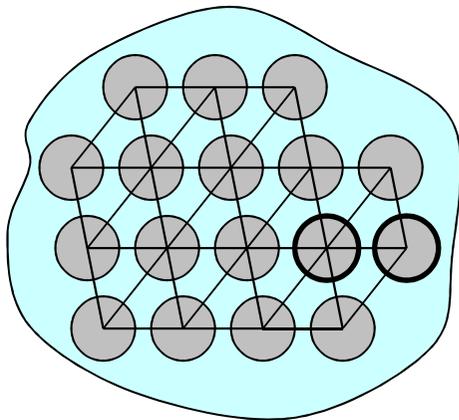
Let's do some math, ma prima: (brevissimi) richiami di calcolo tensoriale.

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} +1, (ijk) = (123), (231), (312) & \text{Permutazioni pari di 1 2 3.} \\ 0, i = j, j = k, k = i \\ -1, (ijk) = (321), (132), (213) & \text{Permutazioni dispari di 1 2 3.} \end{cases}$$

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \varepsilon_{ijk} a_j b_k \mathbf{e}_i$$

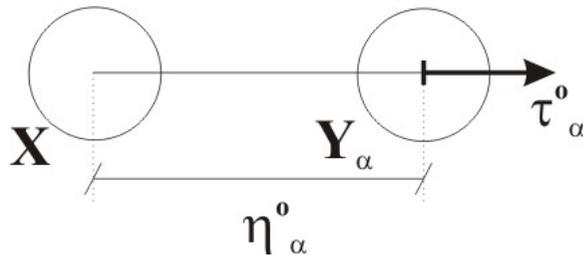
Nel seguito, si userà la convenzione degli indici ripetuti su tutti i simboli latini (i, j, k, l...), ma non su quelli greci ( $\alpha, \beta$ ...).

- ⊕ La DM considera il dominio di interesse suddiviso in nodi, che non devono essere necessariamente distribuiti in modo regolare nello spazio (anche se assumere una distribuzione delle particelle a formare un *lattice*, è certamente più conveniente).



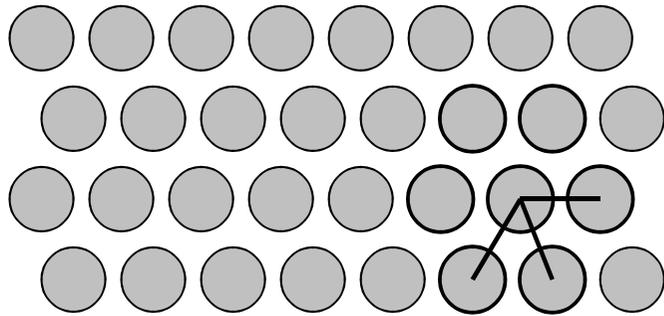
L'elemento costitutivo di base è rappresentato da un *doublet*, un insieme di due nodi fra i quali avvengono delle interazioni.

Il doublet è l'equivalente discreto del volume elementare della Meccanica Classica.



Un *doublet* è dunque coppia di nodi ( $X$  e  $Y_\alpha$ ) posti ad una distanza finita  $\eta_\alpha \tau_\alpha$ , nella direzione identificata dal vettore  $\tau_\alpha$ .

- ⊕ A rigore, il parametro fondamentale della DM è la distanza internodale  $\eta_\alpha$ , non il diametro delle particelle.
- ⊕ Nella *Interpretazione Granulare* della DM, centrati nei nodi si possono considerare delle particelle sferiche, di diametro  $D$ . Se  $D = \eta_\alpha$ , allora le particelle risultano a contatto.
- ⊕ Si assumi ora che i centri delle particelle (o nodi) formino uno dei 14 reticoli di Bravais.
- ⊕ Ad ogni nodo (per esempio  $X$ ) può essere allora associato un bundle  $T_m$  di  $m$  doublet, che comprendono tutte le  $m$  particelle più vicine al nodo  $X$ .
- ⊕ Per ragioni di simmetria,  $T_m$  può essere sempre scomposto in 2 bundle  $T_n$ :  $T_m = T_n^+ + T_n^-$ ,  $n = m/2$ .



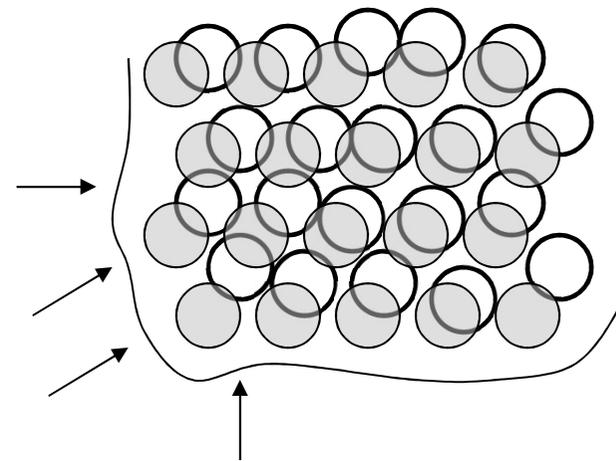
⊕ Capiamo meglio cosa è un bundle:

In questo caso, ogni nodo è circondata da  $m=6$  particelle.

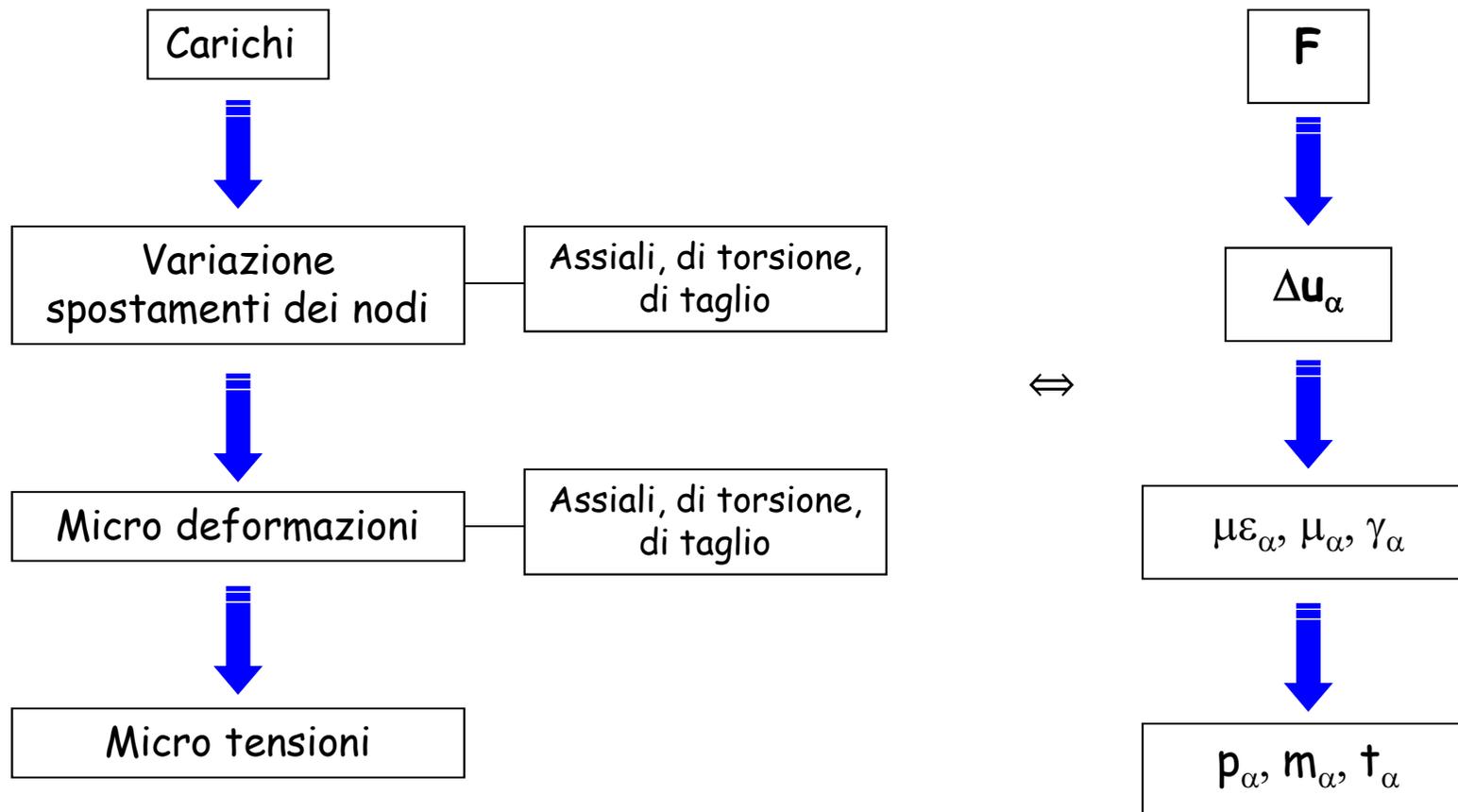
Ma il bundle  $T_n$  è costituito da  $n=3$  doublet.

⊕ Il bundle è la più piccola unità ripetibile all'interno del reticolo, che per sole traslazioni tessella tutto il dominio.

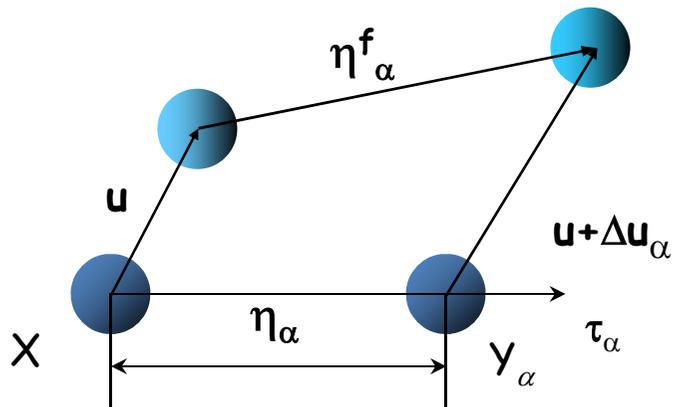
Quando il mezzo è soggetto a delle sollecitazioni, all'interno del dominio i doublet subiranno degli spostamenti, che causeranno a loro volta delle micro deformazioni (micro strains), e delle micro tensioni (micro stresses).



La linea logica degli steps che dall'applicazione di un carico porta alla generazione di uno stato tensionale, è riassunta dal flow chart:



## Legame spostamento deformazioni ( $\mu\varepsilon_\alpha$ only)



- Configurazione indeformata
- Configurazione deformata

- ⊕  $\mathbf{u}(\mathbf{X}, t)$  è il campo vettoriale degli spostamenti dei punti del dominio, funzione della posizione  $\mathbf{X}$  e del tempo  $t$  (definizione).
- ⊕ Il vettore variazione spostamento  $\Delta \mathbf{u}$ , è definito come la variazione dello spostamento fra i due nodi che costituiscono un doppietto:  $\Delta \mathbf{u}_\alpha = \mathbf{u}(\mathbf{X} + \boldsymbol{\eta}_\alpha, t) - \mathbf{u}(\mathbf{X}, t)$ .
- ⊕ L'ipotesi fondamentale della DM, è che il vettore  $\Delta \mathbf{u}$  possa essere espresso attraverso una serie di Taylor, centrata nel nodo di origine:

$$\Delta \mathbf{u}_\alpha = \sum_{\chi=1}^M \frac{(\boldsymbol{\eta}_\alpha)^\chi}{\chi!} (\boldsymbol{\tau}_\alpha^0 \cdot \nabla)^\chi \mathbf{u}(\mathbf{X}, t)$$

## Legame spostamento deformazioni ( $\mu\varepsilon_\alpha$ only)

$$\Delta \mathbf{u}_\alpha = \sum_{\chi=1}^M \frac{(\eta_\alpha)^\chi}{\chi!} (\boldsymbol{\tau}_\alpha^0 \cdot \nabla)^\chi \mathbf{u}(\mathbf{X}, t)$$

$M$  è l'ordine di troncamento della serie. Se infinito la variazione dello spostamento è restituita in modo esatto dallo sviluppo in serie di spostamenti.

- ⊕ Se  $M$  è finito, indica l'ordine di approssimazione col quale la DM rappresenta il prototipo fisico reale (*questo significa che la DM è una teoria multiscale*).
- ⊕ È funzione di  $M$ , dello spostamento del punto iniziale  $\mathbf{u}$ , ma anche della distanza internodale e del versore  $\boldsymbol{\tau}_\alpha$ : delle caratteristiche micro-strutturali del materiale (*questo significa che la DM è una teoria di scala*).

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{u}_\alpha \Big|_{M=2} &= \sum_{\chi=1}^2 \frac{(\eta_\alpha)^\chi}{\chi!} (\boldsymbol{\tau}_\alpha^0 \cdot \nabla)^\chi \mathbf{u}(\mathbf{X}, t) = \\ &= \eta_\alpha (\boldsymbol{\tau}_\alpha^0 \cdot \nabla) \mathbf{u}(\mathbf{X}, t) + \frac{(\eta_\alpha)^2}{2} (\boldsymbol{\tau}_\alpha^0 \cdot \nabla)^2 \mathbf{u}(\mathbf{X}, t) = \\ &= \eta_\alpha \left( \tau_{\alpha x}^0 \frac{\partial}{\partial x} + \tau_{\alpha y}^0 \frac{\partial}{\partial y} \right) \mathbf{u}(\mathbf{X}, t) + \frac{(\eta_\alpha)^2}{2} \left( \tau_{\alpha x}^0{}^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \tau_{\alpha y}^0{}^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} + 2\tau_{\alpha x}^0 \tau_{\alpha y}^0 \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \right) \mathbf{u}(\mathbf{X}, t) \end{aligned}$$

Proviamo a sviluppare la serie:

$$\begin{aligned}\Delta \mathbf{u}_\alpha \Big|_{M=2} &= \sum_{\chi=1}^2 \frac{(\eta_\alpha)^\chi}{\chi!} (\boldsymbol{\tau}_\alpha^0 \cdot \nabla)^\chi \mathbf{u}(\mathbf{X}, t) = \\ &= \eta_\alpha (\boldsymbol{\tau}_\alpha^0 \cdot \nabla) \mathbf{u}(\mathbf{X}, t) + \frac{(\eta_\alpha)^2}{2} (\boldsymbol{\tau}_\alpha^0 \cdot \nabla)^2 \mathbf{u}(\mathbf{X}, t) = \\ &= \eta_\alpha \left( \tau_{\alpha x}^0 \frac{\partial}{\partial x} + \tau_{\alpha y}^0 \frac{\partial}{\partial y} \right) \mathbf{u}(\mathbf{X}, t) + \frac{(\eta_\alpha)^2}{2} \left( \tau_{\alpha x}^0{}^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \tau_{\alpha y}^0{}^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} + 2\tau_{\alpha x}^0 \tau_{\alpha y}^0 \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \right) \mathbf{u}(\mathbf{X}, t)\end{aligned}$$

Proviamo a  
sviluppare la  
serie:

### Legame spostamento deformazioni ( $\mu\varepsilon_\alpha$ only)

Ora, per definizione, la deformazione associata al doublet è:

$$\varepsilon_\alpha = \frac{\eta_\alpha^f - \eta_\alpha}{\eta_\alpha}$$

Se si assume che lo spostamento relativo dei nodi sia piccolo rispetto alla distanza internodale, allora risulta valida la relazione approssimata:

$$\varepsilon_\alpha = \frac{\tau_\alpha^0 \cdot \Delta \mathbf{u}_\alpha}{\eta_\alpha}$$

+

$$\Delta \mathbf{u}_\alpha = \sum_{\chi=1}^M \frac{(\eta_\alpha)^\chi}{\chi!} (\tau_\alpha^0 \cdot \nabla)^\chi \mathbf{u}(\mathbf{X}, t)$$

$$\varepsilon_\alpha = \tau_{\alpha i}^0 \sum_{\chi=1}^M \frac{(\eta_\alpha)^{\chi-1}}{\chi!} \tau_{\alpha k_1}^0 \cdots \tau_{\alpha k_\chi}^0 \frac{\partial^\chi u_i}{\partial \mathbf{x}_{k_1} \cdots \partial \mathbf{x}_{k_\chi}}$$

## Micro deformazioni ( $\mu\varepsilon_\alpha$ )

$$\varepsilon_\alpha = \tau_{\alpha i}^0 \sum_{\chi=1}^M \frac{(\eta_\alpha)^{\chi-1}}{\chi!} \tau_{\alpha k_1}^0 \cdots \tau_{\alpha k_\chi}^0 \frac{\partial^\chi u_i}{\partial x_{k_1} \cdots \partial x_{k_\chi}}$$

Questa relazione indica come le micro deformazioni dipendano in via diretta dalla geometria del sistema ( $\tau_\alpha$ ), dal parametro di scala caratteristico ( $\eta_\alpha$ ), e dall'ordine di approssimazione  $M$ .

Per  $M=1$  cosa otteniamo?

$$\begin{aligned} \varepsilon_\alpha|_{M=1} &= \tau_{\alpha i}^0 \tau_{\alpha k_1}^0 \frac{\partial u_i}{\partial x_{k_1}} = \\ &= \tau_{\alpha i}^0 \tau_{\alpha j}^0 u_{i,j} = \tau_{\alpha i}^0 \tau_{\alpha j}^0 \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \end{aligned}$$

## Micro deformazioni ( $\mu\varepsilon_\alpha$ )

$$\varepsilon_\alpha|_{M=1} = \tau_{\alpha i}^0 \tau_{\alpha j}^0 \underbrace{\frac{1}{2}(\mathbf{u}_{i,j} + \mathbf{u}_{j,i})}_{\varepsilon_{ij}}$$

L'espressione ottenuta.

Sono le componenti del classico tensore di deformazione.

$$\varepsilon_\alpha|_{M=1} = \tau_{\alpha i}^0 \tau_{\alpha j}^0 \varepsilon_{ij}$$

Per  $M=1$ , la deformazione ottenuta lungo il doublet  $\alpha$  è la proiezione delle componenti di deformazione classica lungo la direzione di  $\alpha$ .

Al primo ordine di approssimazione ( $M=1$ ), la Doublet Mechanics coincide con la Meccanica Classica!

-Ma questo è un concetto che vedremo meglio dopo.

## Micro deformazioni ( $\mu\varepsilon_\alpha$ )

Per  $M=2$  cosa otteniamo?

$$\begin{aligned} \varepsilon_\alpha|_{M=2} &= \tau_{\alpha i}^0 \sum_{\chi=1}^2 \frac{(\eta_\alpha)^{\chi-1}}{\chi!} \tau_{\alpha k_1}^0 \cdots \tau_{\alpha k_\chi}^0 \frac{\partial^\chi u_i}{\partial x_{k_1} \cdots \partial x_{k_\chi}} = \\ &= \underbrace{\tau_{\alpha i}^0 \tau_{\alpha j}^0 u_{i,j}}_{\varepsilon_\alpha|_{M=1}} + \underbrace{\frac{\eta_\alpha}{2} \tau_{\alpha i}^0 \tau_{\alpha j}^0 \tau_k^0 u_{i,jk}}_{\text{Refinement Term}} \end{aligned}$$

Notiamo un paio di cose:

- ⊕ La soluzione, per  $M=2$ , è composta da due termini, il primo dei quali è la soluzione ottenuta per  $M=1$ . Specificare  $M$  maggiori, significa migliorare la soluzione con termini aggiuntivi.
- ⊕ Il parametro di scala  $\eta$  è presente solo per  $M>1$ . Questo significa che per  $M=1$ , la teoria non è di scala (e infatti degenera nella Meccanica Classica).

## Micro deformazioni (generale)

- ⊕ Abbiamo ottenuto il legame fra l'espressione delle micro deformazioni assiali  $\mu_\alpha$ , e degli spostamenti nodali  $\mathbf{u}$ .
- ⊕ Con considerazioni analoghe, si ottiene l'espressione delle micro deformazioni di torsione ( $\mu_\alpha$ ) e di taglio ( $\gamma_\alpha$ ), in funzione degli spostamenti e delle rotazioni nodali,  $\mathbf{u}$  e  $\phi$ .

$$\mu_\alpha = \tau_{\alpha i}^0 \sum_{\chi=1}^M \frac{(\eta_\alpha)^{\chi-1}}{\chi!} \tau_{\alpha k_1}^0 \cdots \tau_{\alpha k_\chi}^0 \frac{\partial^\chi \phi_i}{\partial \mathbf{x}_{k_1} \cdots \partial \mathbf{x}_{k_\chi}}$$

$$\gamma_\alpha = - \left( \phi_j + \frac{1}{2} \sum_{\chi=1}^M \frac{(\eta_\alpha)^{\chi-1}}{\chi!} \tau_{\alpha k_1}^0 \cdots \tau_{\alpha k_\chi}^0 \frac{\partial^\chi \phi_i}{\partial \mathbf{x}_{k_1} \cdots \partial \mathbf{x}_{k_\chi}} \right) \tau_{\alpha p}^0 \varepsilon_{ijp} +$$

$$+ (\delta_{ij} - \tau_{\alpha i}^0 \tau_{\alpha j}^0) \sum_{\chi=1}^M \frac{(\eta_\alpha)^{\chi-1}}{\chi!} \tau_{\alpha k_1}^0 \cdots \tau_{\alpha k_\chi}^0 \frac{\partial^\chi u_j}{\partial \mathbf{x}_{k_1} \cdots \partial \mathbf{x}_{k_\chi}}$$

Espressioni un po' complicate?  
Per fortuna in molti problemi si può assumere che le interazioni fra i nodi siano centrali. Questo significa che si potranno considerare solo micro deformazioni assiali.

## Micro tensioni

Si postula che le micro deformazioni all'interno del corpo siano causa di altrettante micro tensioni:

$$\begin{array}{l}
 \mu \varepsilon_{\alpha} \\
 \mu_{\alpha} \\
 \gamma_{\alpha}
 \end{array}
 \quad \longrightarrow \quad
 \begin{array}{l}
 p_{\alpha} \quad m_{\alpha} \\
 \quad \quad t_{\alpha}
 \end{array}
 \quad \text{Assiali } (p_{\alpha}), \text{ di torsione } (m_{\alpha}), \text{ di taglio } (t_{\alpha}).$$

Un legame generale, e sempre valido, fra micro deformazioni e micro tensioni si ottiene se si confrontano le due possibili espressioni della variazione nel tempo dell'energia di deformazione per unità di volume:

$$\begin{aligned}
 \dot{W} &= \sum_{\alpha=1}^n (p_{\alpha} \dot{\varepsilon}_{\alpha} + m_{\alpha} \dot{\mu}_{\alpha} + t_{ai} \dot{\gamma}_{\alpha i}) \\
 &= \sum_{\alpha=1}^n \left( \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{\alpha}} \dot{\varepsilon}_{\alpha} + \frac{\partial W}{\partial \mu_{\alpha}} \dot{\mu}_{\alpha} + \frac{\partial W}{\partial \gamma_{\alpha}} \dot{\gamma}_{\alpha i} \right)
 \end{aligned}
 \quad \longrightarrow \quad
 \begin{cases}
 p_{\alpha} = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{\alpha}} \\
 m_{\alpha} = \frac{\partial W}{\partial \mu_{\alpha}} \\
 t_{ai} = \frac{\partial W}{\partial \gamma_{\alpha}}
 \end{cases}$$

## Micro tensioni

Ancora, considerazioni energetiche (il primo e il secondo principio della termodinamica - nella forma della disuguaglianza di Clausius), portano a definire le seguenti dipendenze funzionali ( $\theta$  la temperatura,  $X$  le coordinate spaziali):

$$p_\alpha = p_\alpha(\varepsilon_\alpha, \mu_\alpha, \gamma_\alpha, \theta; X) \quad m_\alpha = m_\alpha(\varepsilon_\alpha, \mu_\alpha, \gamma_\alpha, \theta; X) \quad t_\alpha = t_\alpha(\varepsilon_\alpha, \mu_\alpha, \gamma_\alpha, \theta; X)$$

Se si assume un legame costitutivo elastico lineare, allora le micro tensioni sono legate alle micro deformazioni tramite:

$$p_\alpha = \sum_{\beta=1}^n (A_{\alpha\beta} \varepsilon_\beta + B_{\alpha\beta} \mu_\beta) + J_\alpha \Theta$$

$$m_\alpha = \sum_{\beta=1}^n (D_{\alpha\beta} \varepsilon_\beta + E_{\alpha\beta} \mu_\beta) + K_\alpha \Theta$$

$$t_{\alpha i} = \sum_{\beta=1}^n I_{\alpha\beta ij} \gamma_{\beta j}$$

- ⊕  $A_{\alpha\beta}, B_{\alpha\beta}, D_{\alpha\beta}, E_{\alpha\beta}, I_{\alpha\beta ij}$  sono dei moduli di rigidità.
- ⊕  $K_\alpha, J_\alpha$  dei coefficienti di Fourier.
- ⊕  $\Theta$  la variazione di temperatura  $\theta - \theta_0$ , rispetto ad uno zero arbitrario  $\theta_0$ .

## Micro tensioni

$$p_\alpha = \sum_{\beta=1}^n (A_{\alpha\beta} \varepsilon_\beta + B_{\alpha\beta} \mu_\beta) + J_\alpha \Theta$$

$$m_\alpha = \sum_{\beta=1}^n (D_{\alpha\beta} \varepsilon_\beta + E_{\alpha\beta} \mu_\beta) + K_\alpha \Theta$$

$$t_{\alpha i} = \sum_{\beta=1}^n I_{\alpha\beta ij} \gamma_{\beta j}$$

- ⊕ Queste le relazioni, ma:
- ⊕ Nell'ipotesi di interazioni **centrali**,  $m_\alpha$  e  $t_{\alpha i}$  sono identicamente nulli.
- ⊕  $\Theta$  si può considerare spesso pure nulla.
- ⊕ Per cui si ha alla fine:

$$p_\alpha = \sum_{\beta=1}^n A_{\alpha\beta} \varepsilon_\beta$$

$$p_\alpha = A_\alpha \varepsilon_\alpha$$

Questa relazione, nell'ipotesi ulteriore che le interazioni siano **locali** (e cioè la deformazione lungo il doublet  $\alpha=1$  ha effetti solo sulla tensione associata allo stesso doublet - si parla di materiale **DM homogenous**), si specializza ulteriormente in:

In alcuni problemi affrontati con la DM, si farà l'ipotesi di **interazioni centrali e locali**.

## Equazioni di governo

Impiegando metodi energetici (la minimizzazione del funzionale dell'energia immagazzinata da un corpo soggetto ad una forza e ad un momento per unità di area  $\mathbf{T}$  e  $\mathbf{M}$ , e alla forza per unità di volume  $\mathbf{F}$ ) si ottengono le equazioni di equilibrio della DM:

$$\sum_{\alpha=1}^n \sum_{\chi=1}^M (-1)^{\chi-1} \frac{(\eta_{\alpha})^{\chi-1}}{\chi!} \tau_{\alpha k_1}^0 \dots \tau_{\alpha k_{\chi}}^0 \frac{\partial^{\chi} (\mathbf{t}_{\alpha i} + \mathbf{p}_{\alpha i})}{\partial \mathbf{x}_{k_1} \dots \partial \mathbf{x}_{k_{\chi}}} + \mathbf{F}_i = \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}_i}{\partial t^2}$$

Alle Forze

$$\sum_{\alpha=1}^n \left( \varepsilon_{ijq} \tau_{\alpha j}^0 \tau_{\alpha q} + \sum_{\chi=1}^M (-1)^{\chi-1} \frac{(\eta_{\alpha})^{\chi-1}}{\chi!} \tau_{\alpha k_1}^0 \dots \tau_{\alpha k_{\chi}}^0 \frac{\partial^{\chi} (m_{\alpha i} - \frac{1}{2} \eta_{\alpha} \varepsilon_{ijq} \tau_{\alpha j}^0 \tau_{\alpha q})}{\partial \mathbf{x}_{k_1} \dots \partial \mathbf{x}_{k_{\chi}}} \right) = 0$$

Ai Momenti

## Condizioni al contorno

E le condizioni al contorno:

$$\sum_{\alpha=1}^n n_{kr} \sum_{\alpha=1}^n \tau_{\alpha k_r}^0 \sum_{\chi=r}^M (-1)^{\chi-1} \frac{(\eta_{\alpha})^{\chi-1}}{\chi!} \tau_{\alpha k_{r+1}}^0 \dots \tau_{\alpha k_{\chi}}^0 \frac{\partial^{\chi-r} (t_{\alpha i} + p_{\alpha i})}{\partial x_{k_{r+1}} \dots \partial x_{k_{\chi}}} = T_i \delta_{r1}$$

Alle Forze

$$n_{kr} \sum_{\alpha=1}^n \tau_{\alpha k_r}^0 \sum_{\chi=r}^M (-1)^{\chi} \frac{(\eta_{\alpha})^{\chi-1}}{\chi!} \tau_{\alpha k_{r+1}}^0 \dots \tau_{\alpha k_{\chi}}^0 \frac{\partial^{\chi-r} (m_{\alpha i} - \frac{1}{2} \eta_{\alpha} \varepsilon_{ijq} \tau_{\alpha j}^0 \tau_{\alpha q}^0)}{\partial x_{k_{r+1}} \dots \partial x_{k_{\chi}}} = -M_i \delta_{r1}$$

Ai Momenti

Che sono scritte in termini di micro tensioni.

## Micro tensioni e Macro tensioni

Tutti i risultati, fino ad ora, li abbiamo ottenuti in termini di micro tensioni. Si può tuttavia ottenere l'espressione di macro tensioni generalizzate, ottenute da una combinazione delle micro tensioni.

Basta indicare le componenti del vettore di trazione superficiale  $\mathbf{T}$ , nelle c.c, come:

$$\sum_{\alpha=1}^n n_{kr} \sum_{\alpha=1}^n \tau_{\alpha k_r}^0 \sum_{\chi=r}^M (-1)^{\chi-1} \frac{(\eta_{\alpha})^{\chi-1}}{\chi!} \tau_{\alpha k_{r+1}}^0 \dots \tau_{\alpha k_{\chi}}^0 \frac{\partial^{\chi-r} (t_{\alpha i} + p_{\alpha i})}{\partial x_{k_{r+1}} \dots \partial x_{k_{\chi}}} = \boxed{T_i} \delta_{r1}$$

$T_i = \sigma_{ki} n_k$

$$\sigma_{k_i}^{(M)} = \sum_{\alpha=1}^n \tau_{\alpha k_1}^0 \sum_{\chi=1}^M (-1)^{\chi-1} \frac{(\eta_{\alpha})^{\chi-1}}{\chi!} \tau_{\alpha k_2}^0 \dots \tau_{\alpha k_{\chi}}^0 \frac{\partial^{\chi-1} (t_{\alpha i} + p_{\alpha i})}{\partial x_{k_2} \dots \partial x_{k_{\chi}}}$$

M restituisce il livello di approssimazione col quale le macro tensioni sono rappresentate dalle micro tensioni.

## Equilibrio in termini di Macro tensioni

A questo punto, l'equazione di equilibrio alle forze può essere riformulata in termini di macro tensioni.

$$\sum_{\alpha=1}^n \sum_{\chi=1}^M (-1)^{\chi-1} \frac{(\eta_{\alpha})^{\chi-1}}{\chi!} \tau_{\alpha k_1}^0 \dots \tau_{\alpha k_{\chi}}^0 \frac{\partial^{\chi} (\mathbf{t}_{\alpha i} + \mathbf{p}_{\alpha i})}{\partial \mathbf{x}_{k_1} \dots \partial \mathbf{x}_{k_{\chi}}} + \mathbf{F}_i = \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}_i}{\partial t^2}$$

Equilibrio Forze

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_{k_1}} \sum_{\alpha=1}^n \tau_{\alpha k_1}^0 \sum_{\chi=1}^M (-1)^{\chi-1} \frac{(\eta_{\alpha})^{\chi-1}}{\chi!} \tau_{\alpha k_2}^0 \dots \tau_{\alpha k_{\chi}}^0 \frac{\partial^{\chi-1} (\mathbf{t}_{\alpha i} + \mathbf{p}_{\alpha i})}{\partial \mathbf{x}_{k_2} \dots \partial \mathbf{x}_{k_{\chi}}} + \mathbf{F}_i = \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}_i}{\partial t^2}$$

Riscritta come..

$$\sigma_{k_1 i}^{(M)} = \sum_{\alpha=1}^n \tau_{\alpha k_1}^0 \sum_{\chi=1}^M (-1)^{\chi+1} \frac{(\eta_{\alpha})^{\chi-1}}{\chi!} \tau_{\alpha k_2}^0 \dots \tau_{\alpha k_{\chi}}^0 \frac{\partial^{\chi-1} (\mathbf{t}_{\alpha i} + \mathbf{p}_{\alpha i})}{\partial \mathbf{x}_{k_2} \dots \partial \mathbf{x}_{k_{\chi}}}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \sigma_{ij}^{(M)}}{\partial \mathbf{x}_i} + \mathbf{F}_j = \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}_j}{\partial t^2}$$

Vi ricorda qualche cosa?

## Per riassumere: DM Highlights

- ⊕ È una teoria di scala (e multiscala).
- ⊕ È costruita su di un prototipo fisico reale. Le approssimazioni matematiche sono introdotte ad un secondo livello (rappresentate da  $M$ ).
- ⊕ Per  $M=1$ , la DM coincide con la CM, al limite  $M \rightarrow \infty$ , si identifica con la LD. Non è in contraddizione con queste teorie (che ne rappresentano gli estremi) e anzi le comprende, andandosi a configurare come un modello globalmente valido.
- ⊕ È flessibile, consente di affrontare problemi diversi in **campo elastico, plastico, statico o dinamico**.
- ⊕ Permette una facile identificazione strutturale. Al livello più basso di approssimazione ( $M=1$ ), esiste una relazione diretta fra macro e micro costanti di elasticità, che possono essere determinate ed utilizzate poi per un'analisi a livello più alto ( $M>1$ ).