

Ciclo di lezioni sulla Doublet Mechanics (DM)

Parte II

*A Case Study:
Multi Scale Plane Waves*

Dove eravamo rimasti?

L'equazione di equilibrio della DM:

$$\sum_{\alpha=1}^n \sum_{\chi=1}^M (-1)^{\chi-1} \frac{(\eta_{\alpha})^{\chi-1}}{\chi!} \tau_{\alpha k_1}^0 \dots \tau_{\alpha k_{\chi}}^0 \frac{\partial^{\chi} (\mathbf{t}_{\alpha i} + \mathbf{p}_{\alpha i})}{\partial \mathbf{x}_{k_1} \dots \partial \mathbf{x}_{k_{\chi}}} + \mathbf{F}_i = \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}_i}{\partial t^2}$$

Alle Forze

Regola il comportamento dei fenomeni fisici che avvengono nel dominio particellare modellato attraverso la DM.

È scritta in funzione:

- ⊕ Delle direzioni dei doublets τ_{α} .
- ⊕ Delle distanzi internodali η_{α} .
- ⊕ Delle micro tensioni.

Possiamo semplificare alcune cose:

$$\sum_{\alpha=1}^n \sum_{\chi=1}^M (-1)^{\chi-1} \frac{(\eta_{\alpha})^{\chi-1}}{\chi!} \tau_{\alpha k_1}^0 \dots \tau_{\alpha k_{\chi}}^0 \frac{\partial^{\chi} (\mathbf{t}_{\alpha i} + \mathbf{p}_{\alpha i})}{\partial \mathbf{x}_{k_1} \dots \partial \mathbf{x}_{k_{\chi}}} + \mathbf{F}_i = \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}_i}{\partial t^2}$$

$\mathbf{t}_{\alpha i} = 0$ Nell'ipotesi di interazioni centrali

$$\sum_{\alpha=1}^n \sum_{\chi=1}^M (-1)^{\chi-1} \frac{(\eta_{\alpha})^{\chi-1}}{\chi!} \tau_{\alpha k_1}^0 \dots \tau_{\alpha k_{\chi}}^0 \frac{\partial^{\chi} \mathbf{p}_{\alpha i}}{\partial \mathbf{x}_{k_1} \dots \partial \mathbf{x}_{k_{\chi}}} + \mathbf{F}_i = \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}_i}{\partial t^2} \quad + \quad \mathbf{p}_{\alpha} = \sum_{\beta=1}^n \mathbf{A}_{\alpha\beta} \boldsymbol{\varepsilon}_{\beta}$$

$$\sum_{\alpha=1}^n \sum_{\beta=1}^n \sum_{\chi=1}^M (-1)^{\chi-1} \mathbf{A}_{\alpha\beta} \frac{(\eta_{\alpha})^{\chi-1}}{\chi!} \tau_{\alpha k_1}^0 \dots \tau_{\alpha k_{\chi}}^0 \frac{\partial^{\chi} \boldsymbol{\varepsilon}_{\alpha i}}{\partial \mathbf{x}_{k_1} \dots \partial \mathbf{x}_{k_{\chi}}} + \mathbf{F}_i = \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}_i}{\partial t^2}$$

Ma noi la vogliamo scrivere in funzione degli spostamenti \mathbf{u} .

$$\sum_{\alpha=1}^n \sum_{\beta=1}^n \sum_{\chi=1}^M (-1)^{\chi-1} A_{\alpha\beta} \frac{(\eta_{\alpha})^{\chi-1}}{\chi!} \tau_{\alpha k_1}^0 \dots \tau_{\alpha k_{\chi}}^0 \frac{\partial^{\chi} \varepsilon_{\alpha i}}{\partial x_{k_1} \dots \partial x_{k_{\chi}}} + F_i = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}$$

$$\varepsilon_{\alpha} = \tau_{\alpha i}^0 \sum_{\chi=1}^M \frac{(\eta_{\alpha})^{\chi-1}}{\chi!} \tau_{\alpha k_1}^0 \dots \tau_{\alpha k_{\chi}}^0 \frac{\partial^{\chi} u_i}{\partial x_{k_1} \dots \partial x_{k_{\chi}}}$$

La forma analitica per le micro deformazioni.

$$\sum_{\alpha=1}^n \sum_{\beta=1}^n \sum_{S=1}^M \sum_{\chi=1}^M (-1)^{\chi-1} A_{\alpha\beta} \frac{(\eta_{\alpha})^{\chi-1} (\eta_{\alpha})^{S-1}}{\chi! S!} \tau_{\alpha i}^0 \tau_{\alpha k_1}^0 \dots \tau_{\alpha k_{\chi}}^0 \tau_{\alpha g_1}^0 \dots \tau_{\alpha g_S}^0 \frac{\partial^{\chi+S} u_i}{\partial x_{k_1} \dots \partial x_{k_{\chi}} \partial x_{g_1} \dots \partial x_{g_S}} \boxed{F_i} = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = 0$$

$$\sum_{\alpha=1}^n \sum_{\beta=1}^n \sum_{S=1}^M \sum_{\chi=1}^M (-1)^{\chi-1} A_{\alpha\beta} \frac{(\eta_{\alpha})^{\chi-1} (\eta_{\alpha})^{S-1}}{\chi! S!} \tau_{\alpha i}^0 \tau_{\alpha k_1}^0 \dots \tau_{\alpha k_{\chi}}^0 \tau_{\alpha g_1}^0 \dots \tau_{\alpha g_S}^0 \frac{\partial^{\chi+S} u_i}{\partial x_{k_1} \dots \partial x_{k_{\chi}} \partial x_{g_1} \dots \partial x_{g_S}} = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}$$

Se specializziamo l'equazione per alcuni valori di M :

$M=1$

$$C_{ijkl} \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_k \partial x_i} = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}$$

È identica formalmente all'equazione della dinamica della teoria dell'elasticità, ma:

$$C_{ijkl} = \sum_{\alpha=1}^n \sum_{\beta=1}^n A_{\alpha\beta} \tau_{\alpha i} \tau_{\alpha j} \tau_{\beta k} \tau_{\beta l}$$

È un macro tensore generalizzato di elasticità. Funzione delle costanti micro elastiche di elasticità, permette l'identificazione dei parametri microstrutturali del materiale.

$M=2$ Assumendo un ordine di approssimazione maggiore di uno (muovendoci verso le mesoscale)...

$$C_{ijkl} \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_k \partial x_l} - C_{ijklmn} \frac{\partial^4 u_j}{\partial x_k \partial x_l \partial x_m \partial x_n} = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}$$

L'equazione di governo si compone di un termine aggiuntivo, che tiene in conto di derivate dello spostamento di ordine superiore al secondo.

$$C_{ijklmn} = \sum_{\alpha=1}^n \sum_{\beta=1}^n A_{\alpha\beta} \frac{\eta_\alpha^2}{4} \tau_{\alpha i} \tau_{\alpha j} \tau_{\alpha k} \tau_{\beta l} \tau_{\beta m} \tau_{\beta n}$$

Ha forma più complessa del tensore precedente. Soprattutto, incorpora quel parametro di scala (la distanza internodale η) che invece non compare al primo ordine di approssimazione $M=1$.

Fino ad ora, le equazioni ottenute hanno una forte impronta di generalità. Si è fatta l'ipotesi di interazioni centrali - che non è una *condizione forte* - e di legame costitutivo elastico lineare che caratterizza i nodi.

Ma non si è fatta ancora nessuna assunzione:

- ⊕ Sulla matrice delle costanti elastiche $A_{\alpha\beta}$.
- ⊕ Sulla configurazione dei *doublets* nello spazio.
- ⊕ Sul tipo di spostamento cui i nodi sono soggetti.
- ⊕ Sull'ordine di approssimazione (M) della DM.

La definizione (per lo più per via di ipotesi) di queste quantità, porta alla soluzione esatta e completa di un problema particolare.

In questo contesto, si si propone di studiare la ***propagazione di onde elastiche piane***.

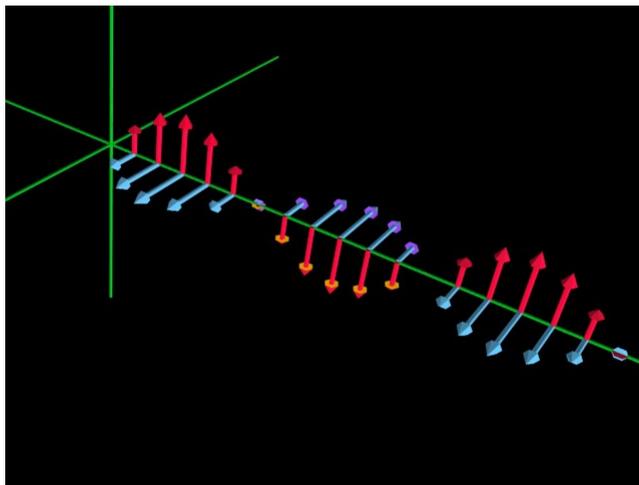
Perché la Propagazione di onde elastiche piane?

- ⊕ Il fenomeno è molto interessante: consente l'analisi di tessuti biologici (granulari per natura), in vitro, e in vivo.
- ⊕ Si vuole dedurre un modello che, unito a classiche tecniche sperimentali di stampo ingegneristico (NDE - Non Destructive Evaluation - per mezzo di ultrasuoni), permetta la deconvoluzione di parametri micro strutturali altrimenti inaccessibili.
- ⊕ Si vuole dunque *caratterizzare un tessuto*.
- ⊕ In modo matematico, oggettivo, e quindi non soggettivo e fortemente (come è purtroppo ora) legato all'esperienza di un medico patologo.
- ⊕ L'aim ultimo e principale, è *l'early detection* di tessuti tumorali.

Dunque, Propagazione di onde elastiche piane:

Si fanno ora una serie di ipotesi sulla geometria dei doppietti, sul tipo di spostamento cui i nodi sono soggetti, sulle costanti di elasticità: si incomincia, cioè, a definire - delimitare - il problema.

⊕ I Ipotesi: *Il tipo di onde che propagano nello spazio*



Si assume che propagano due tipi di onde: piane longitudinali, e piane trasversali.

Piane, significa che il fronte d'onda forma, in maniera indifferente nel tempo, un piano nello spazio, che propaga con velocità $C = \omega/\kappa$.

Ovviamente, ω è la velocità angolare, e κ il numero d'onda.

Longitudinale, significa che il movimento di ogni particella interessata dal movimento, avviene nella stessa direzione nella quale muove l'onda.

Trasversale, invece, che il movimento di ogni particella avviene nella direzione perpendicolare a quella lungo cui l'onda muove.

⊕ *L'espressione analitica dello spostamento (onda longitudinale)*

Per *definizione* di onda elastica piana, longitudinale, lo spostamento nello spazio associato ad essa trova forma matematica:

$$u_i = u_{i0} \text{Exp}[i(\omega t - kx_1)]$$

Si fa l'ipotesi che l'onda propaghi nella direzione di x_1 . La forma dell'equazione è nota: è una classica espressione armonica.

Se dunque combiniamo:

$$\sum_{\alpha=1}^n \sum_{\beta=1}^n \sum_{S=1}^M \sum_{\chi=1}^M (-1)^{\chi-1} A_{\alpha\beta} \frac{(\eta_{\alpha})^{\chi-1} (\eta_{\alpha})^{S-1}}{\chi! S!} \tau_{\alpha i}^0 \tau_{\alpha k_1}^0 \dots \tau_{\alpha k_{\chi}}^0 \tau_{\alpha g_1}^0 \dots \tau_{\alpha g_S}^0 \frac{\partial^{\chi+S} u_i}{\partial x_{k_1} \dots \partial x_{k_{\chi}} \partial x_{g_1} \dots \partial x_{g_S}} = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}$$

+

L'equazione di governo della DM

$$u_i = u_{i0} \text{Exp}[i(\omega t - kx_1)]$$

$$\sum_{\alpha=1}^n \sum_{\beta=1}^n \sum_{S=1}^M \sum_{\chi=1}^M (-1)^{\chi} (i)^{\chi+S} A_{\alpha\beta} (\tau_{\alpha_1}^0)^{\chi+1} (\tau_{\beta_1}^0)^{S+1} \frac{(\eta_{\alpha})^{\chi-1} (\eta_{\beta})^{S-1}}{\chi! S!} k^{\chi+S} = \rho \omega^2$$

Ma manca ancora un passaggio...

$$\sum_{\alpha=1}^n \sum_{\beta=1}^n \sum_{S=1}^M \sum_{\chi=1}^M (-1)^\chi (i)^{\chi+S} \mathbf{A}_{\alpha\beta} (\tau_{\alpha_1}^0)^{\chi+1} (\tau_{\beta_1}^0)^{S+1} \frac{(\eta_\alpha)^{\chi-1} (\eta_\beta)^{S-1}}{\chi! S!} \mathbf{k}^{\chi+S} = \rho \omega^2$$

+

$$V_l = \omega / \kappa$$

È la nota equazione che lega la velocità di propagazione dell'onda a pulsazione e numero d'onda.

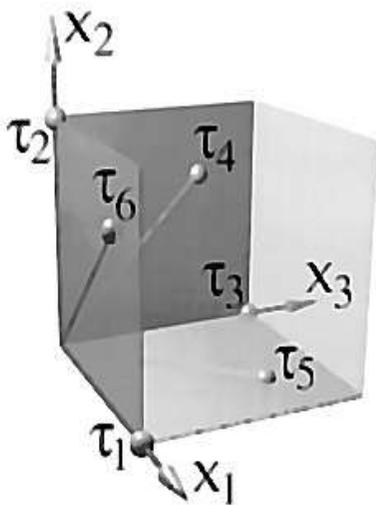
$$V_l^{(M)} = \left(\sum_{\alpha=1}^n \sum_{\beta=1}^n \sum_{S=1}^M \sum_{\chi=1}^M (-1)^\chi (i)^{\chi+S} \mathbf{A}_{\alpha\beta} (\tau_{\alpha_1}^0)^{\chi+1} (\tau_{\beta_1}^0)^{S+1} \frac{(\eta_\alpha / \lambda)^{\chi-1} (\eta_\beta / \lambda)^{S-1}}{\rho \chi! S!} (2\pi)^{\chi+S-2} \right)^{1/2}$$

Importantissima, è la relazione che lega la velocità longitudinale dell'onda, ai parametri microstrutturali del materiale, all'ordine di approssimazione M , ma soprattutto, alla lunghezza d'onda dell'onda che propaga nel mezzo.

$$V_i^{(M)} = \left(\sum_{\alpha=1}^n \sum_{\beta=1}^n \sum_{S=1}^M \sum_{\chi=1}^M (-1)^\chi (i)^{\chi+S} \mathbf{A}_{\alpha\beta} (\tau_{\alpha_1}^0)^{\chi+1} (\tau_{\beta_1}^0)^{S+1} \frac{(\eta_\alpha/\lambda)^{\chi-1} (\eta_\beta/\lambda)^{S-1}}{\rho \chi! S!} (2\pi)^{\chi+S-2} \right)^{1/2}$$

Per sviscerare i contenuti, specializziamola:

Significa effettuare ulteriori ipotesi che definiscono le quantità che intervengono in essa, e renderla esplicita.



⊕ II Ipotesi: *La configurazione spaziale dei doublets*

$$\tau_1 = (1,0,0) \quad \sqrt{2} \tau_4 = (0,1,1)$$

$$\tau_2 = (0,1,0) \quad \sqrt{2} \tau_5 = (1,0,1)$$

$$\tau_3 = (0,0,1) \quad \sqrt{2} \tau_6 = (1,1,0)$$

È abbastanza complessa.

Il numero dei doublets che costituiscono un bundle è sei (n=6).

⊕ III Ipotesi: *La matrice delle micro costanti elastiche $A_{\alpha\beta}$ e η*

$$A_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{12} & 0 & A_{15} & A_{15} \\ & A_{11} & A_{12} & A_{15} & 0 & A_{15} \\ & & A_{11} & A_{15} & A_{15} & 0 \\ & & & A_{44} & 0 & 0 \\ & & & & A_{44} & 0 \\ & & & & & A_{44} \end{pmatrix}$$

Sym

$$A_{12} = A_{11} - \frac{3}{4}A_{44}, \quad A_{15} = -\frac{1}{2}A_{44}$$

L'equazione per l'identificazione strutturale permette poi di ricavare le seguenti relazioni di inversione:

$$\lambda = A_{11} - A_{44}$$

$$\mu = \frac{1}{4}A_{44}$$

- ⊕ Si suppone che la distanza internodale sia la stessa in ogni direzione dello spazio:
- ⊕ $\eta_1 = \eta_2 = \dots = \eta_n \equiv \eta$.

$$V_I^{(M)} = \left(\sum_{\alpha=1}^n \sum_{\beta=1}^n \sum_{S=1}^M \sum_{\chi=1}^M (-1)^\chi (i)^{\chi+S} A_{\alpha\beta} (\tau_{\alpha_1}^0)^{\chi+1} (\tau_{\beta_1}^0)^{S+1} \frac{(\eta_\alpha/\lambda)^{\chi-1} (\eta_\beta/\lambda)^{S-1}}{\rho \chi! S!} (2\pi)^{\chi+S-2} \right)^{1/2}$$

Riproponiamo per l'ennesima volta l'equazione, ma ora, definite le quantità che la costituiscono, possiamo scriverla in maniera esplicita, specificando diversi ordini di approssimazione M :

⊕ $M=1$

$$V_I^{(1)} = \left(\sum_{\alpha=1}^n \sum_{\beta=1}^n A_{\alpha\beta} (\tau_{\alpha_1}^0)^2 (\tau_{\beta_1}^0)^2 \right)^{1/2} = \sqrt{\frac{A_{11} - A_{44}}{2\rho}} \equiv \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}$$

$$\text{Ma: } \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} \equiv \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

Al primo ordine di approssimazione, l'espressione DM per la velocità di propagazione coincide esattamente con quella prevista dalla Meccanica Classica!

$$V_I^{(1)} \equiv \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

E si noti che non sono presenti parametri di scala. Che invece compaiono se consideriamo il secondo ordine di approssimazione:

⊕ $M=2$

$$V_I^{(2)} = V_I^{(1)} \sqrt{1 + \frac{\delta}{\lambda_w^2}}$$

$$\delta = \frac{\pi^2 (\eta_\alpha)^2 \left(A_{11} - \frac{A_{44}}{\sqrt{2}} + \frac{A_{44}}{4} \right)}{A_{11} - \frac{A_{44}}{4}}$$

- ⊕ Per $M=2$, la soluzione dipende dalla soluzione al primo ordine, ma anche dal rapporto fra la distanza internodale e la lunghezza d'onda (η/λ).
- ⊕ Significa che si tiene in conto della microstruttura del materiale.
- ⊕ Ma significa anche che il mezzo è dispersivo: la velocità della perturbazione dipende dalla lunghezza dell'onda incidente (comportamento sperimentalmente accertato per mezzi discreti, ma che la CM non riesce a prevedere).

$$V_1^{(2)} \propto V_1^{(1)} \sqrt{1 + \left(\frac{\eta}{\lambda}\right)^2}$$

- ⊕ A parte i termini moltiplicativi...
- ⊕ La velocità dipende da η e λ in modo non indipendente.
- ⊕ Allora sarà necessario ricorrere ad una analisi multiscala (nel contesto DM, a $M > 1$), se piccole lunghezze d'onda investono materiali mediamente discreti, o se elevate lunghezze d'onda interagiscono con una materia caratterizzata da un parametro di scala molto grande.

⊕ E per $M \rightarrow \infty$?

$$V_1^{(\infty)} = \sqrt{\frac{A_{11}}{\rho}} \frac{\sin(\pi \eta / \lambda_0)}{\pi \eta / \lambda_0}$$

Che è identica all'espressione ricavata nell'ambito della LD per cristalli infiniti, periodici e discreti.

⊕ Onde trasversali:

$$\mathbf{u}_2 = \mathbf{u}_{20} \text{Exp}[i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_1)]$$

Indichiamo solamente l'espressione della velocità, rimanendo sottointesi tutti i passaggi e i significati, come da analisi precedente.

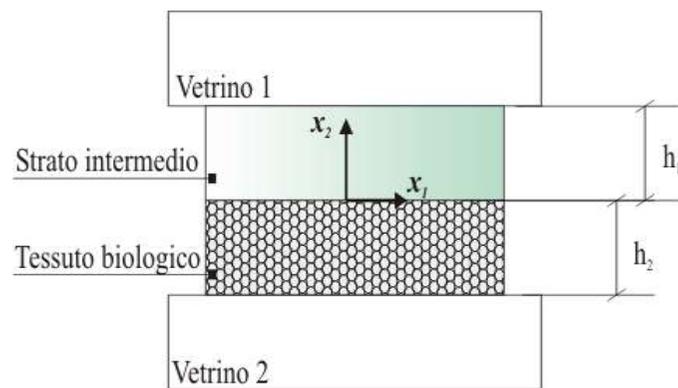
$$V_1^{(M)} = \left(\sum_{\alpha=1}^n \sum_{\beta=1}^n \sum_{S=1}^M \sum_{\chi=1}^M (-1)^\chi (i)^{\chi+S} \mathbf{A}_{\alpha\beta} \boldsymbol{\tau}_{\alpha_2}^0 (\boldsymbol{\tau}_{\alpha_1}^0)^\chi \boldsymbol{\tau}_{\beta_2}^0 (\boldsymbol{\tau}_{\beta_1}^0)^S \frac{(\eta_\alpha/\lambda)^{\chi-1} (\eta_\beta/\lambda)^{S-1}}{\rho \chi! S!} (2\pi)^{\chi+S-2} \right)^{1/2}$$

Importante, è che abbiamo ricavato una legge generale che descrive la propagazione di onde piane in mezzi granulari.

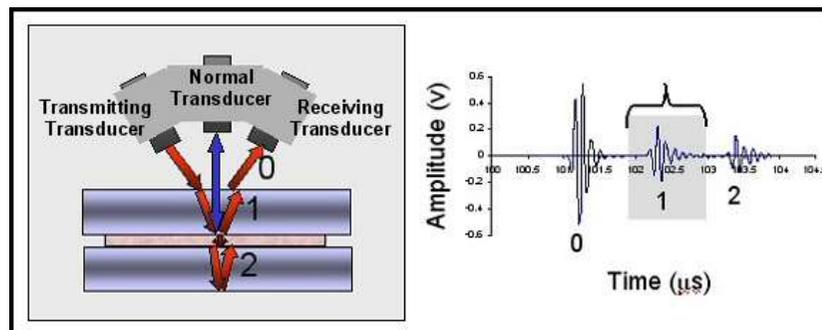
La *grammatica* delle espressioni precedenti, è la seguente:

⊕ Velocità=funzione(microstruttura, lunghezza d'onda)

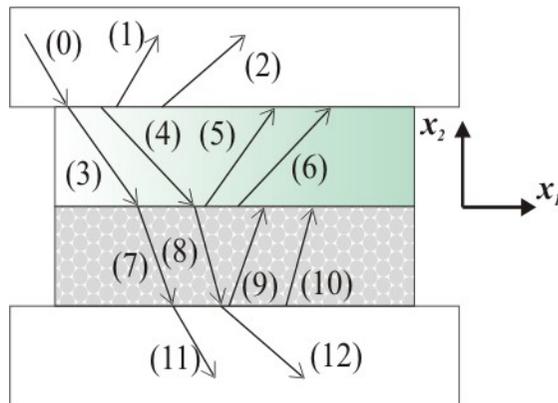
Adesso abbiamo uno strumento col quale analizzare i tessuti biologici.



- ⊕ Si analizzano i fenomeni di propagazione, trasmissione e riflessione di onde elastiche piane in un sistema a sandwich.
- ⊕ Il sistema rappresenta un tipico provino per **indagine istologiche**, e il modello vuole prevederne la risposta se stimolato con **ultrasuoni**.
- ⊕ Obiettivo: stimare la presenza di neoplasie mediante l'uso di ultrasuoni nei tessuti utilizzati per indagini istologiche.



In particolare, ci proponiamo di mettere in relazione i coefficienti di riflessione derivati sperimentalmente dal provino, con le caratteristiche DM del tessuto biologico



$$\sum_{i=1}^m u_1^{(i)} = 0 \quad \sum_{i=1}^m u_2^{(i)} = 0$$

$$\sum_{i=1}^m \sigma_{12}^{(i)} = 0 \quad \sum_{i=1}^m \sigma_{22}^{(i)} = 0$$

- ⊕ 13 ampiezze A_i .
- ⊕ 12 coefficienti di riflessione $R_i = |A_1/A_0|$.
- ⊕ Occorre scrivere altrettante equazioni, e risolvere rispetto a R_i .
- ⊕ Le equazioni si ottengono imponendo le condizioni al contorno, sugli spostamenti normali e tangenziali e sulle tensioni normali e tangenziali.
- ⊕ È possibile scrivere quindi 4 relazioni per interfaccia, e in totale $4 \times 3 = 12$ equazioni.
- ⊕ Si va a determinare R_1 , analizzabile da un trasduttore.

Gli spostamenti elastici associati alle onde trovano una semplice espressione analitica

$$\mathbf{u}^{(n)} = \mathbf{A}_n \mathbf{d}^{(n)} \exp(i\xi^{(n)}), \quad \xi^{(n)} = \mathbf{k}_n (\mathbf{x} \cdot \mathbf{p} - c_n t)$$

- ⊕ 13 onde, 13 direzioni di riflessione
- ⊕ 7 equazioni, 2° legge dell'ottica geometrica
- ⊕ 5 equazioni, 3° legge dell'ottica geometrica
- ⊕ Fissati θ_0 , le proprietà dei materiali e la frequenza, le direzioni risultano determinate

- ➔ Dagli spostamenti, attraverso derivazioni successive, è possibile risalire alle tensioni.
- ➔ Si utilizza il framework della CM per le onde nel primo strato, continuo, e la DM per le perturbazioni nel secondo strato, discreto.

- ⊕ Il sistema di equazioni che definisce il problema di riflessione può dunque essere espresso in forma matriciale:

$$[M]\{R\} = \{B\} \Rightarrow \{R\} = [M]^{-1}\{B\}$$

- ⊕ $[M]$ e $\{B\}$ dipendono in modo diretto dalle proprietà micromeccaniche del tessuto biologico, e dello strato continuo (inclusi gli spessori h_1 e h_2) e dalla frequenza f dell'onda incidente. $\{R\}$ è il vettore colonna delle incognite.

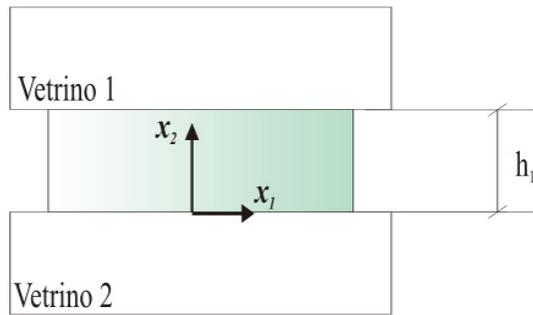
Problema Diretto

- Ipotesi (assunzione) sulle proprietà del sistema: ρ , A_{11} , A_{44} , η .
- Per un esteso range di frequenze calcolare $[M]$ e $\{B\}$.
- Invertire $[M]$ e determinare lo spettro di riflessione.

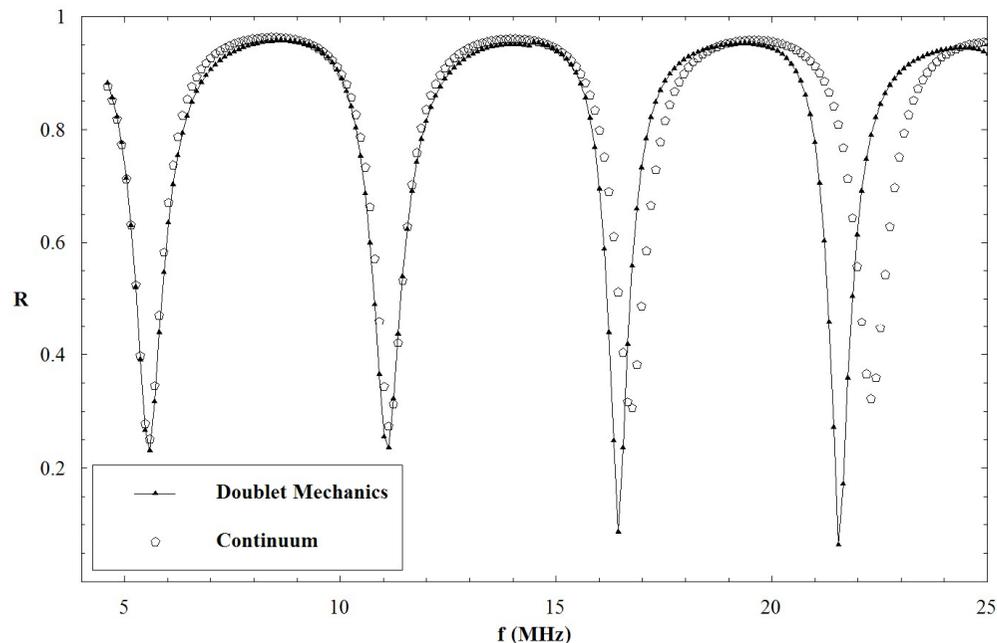
Problema Inverso

- Curva numerico-teorica di riflessione, in forma parametrica.
- Fitting sugli spettri sperimentali.
- Determinazione delle proprietà micromeccaniche ρ , A_{11} , A_{44} , η .

⊕ Risultati numerici: CM e DM



Modello monostrato: si fa degenerare il sistema ad un singolo strato, alternativamente per il layer DM e CM: questo permette un confronto diretto fra i due frameworks.



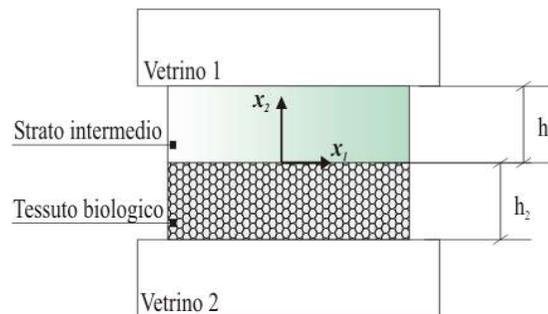
Per un certo range di frequenze le curve si sovrappongono. Questo per le ancora basse frequenze, cui sono associate lunghezze d'onda più grandi. Perturbazioni con grandi lunghezze d'onda non vedono le particelle. In questo caso modello discreto e modello continuo tendono a coincidere.

⊕ Risultati sperimentali: CM e DM

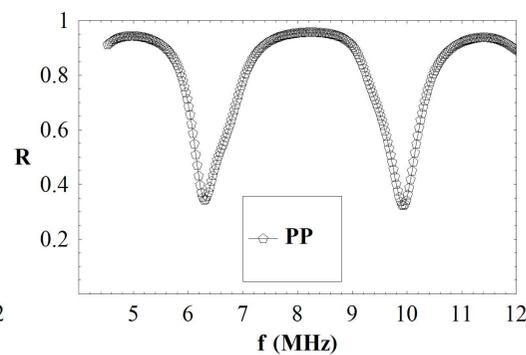
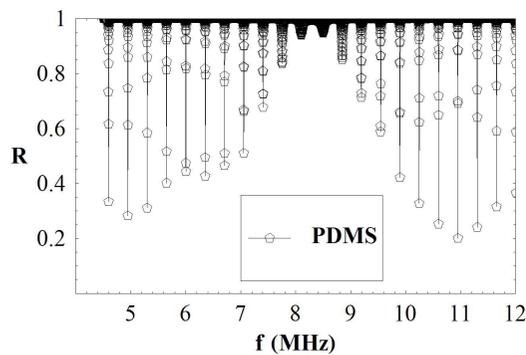
CM – Ricostruzione dei parametri					
	<i>Tumore</i>		<i>Normale</i>		<i>T Test</i>
	<i>Media</i>	<i>DS</i>	<i>Media</i>	<i>DS</i>	<i>P valori</i>
ρ (g/cm ³)	0.9796	0.0788	0.8728	0.0469	0.1298
λ (Gpa)	2.2989	0.2201	1.6848	0.0530	0.0342
μ (Gpa)	0.0438	0.0072	0.0381	0.0152	0.6046
E (Gpa)	0.1304	0.0214	0.1135	0.0449	0.5975
DM – Ricostruzione dei parametri					
	<i>Tumore</i>		<i>Normale</i>		<i>T Test</i>
	<i>Media</i>	<i>DS</i>	<i>Media</i>	<i>DS</i>	<i>P valori</i>
ρ (g/cm ³)	0.8315	0.0233	0.8147	0.0589	0.6813
A_{11} (Gpa)	2.1637	0.0571	1.7836	0.0626	0.0015
A_{44} (Gpa)	0.0523	0.0192	0.2202	0.0327	0.0035
η (mm)	0.0065	0.0011	0.0026	0.0008	0.0091

In tabella si confronta la capacità dei due framework di differenziare in maniera statisticamente significativa un tessuto sano da uno tumorale. Sono evidenziati i parametri che hanno una probabilità $p < 0.05$ di provenire dallo stesso insieme.

⊕ Risultati numerici: strato intermedio in materiale polimerico

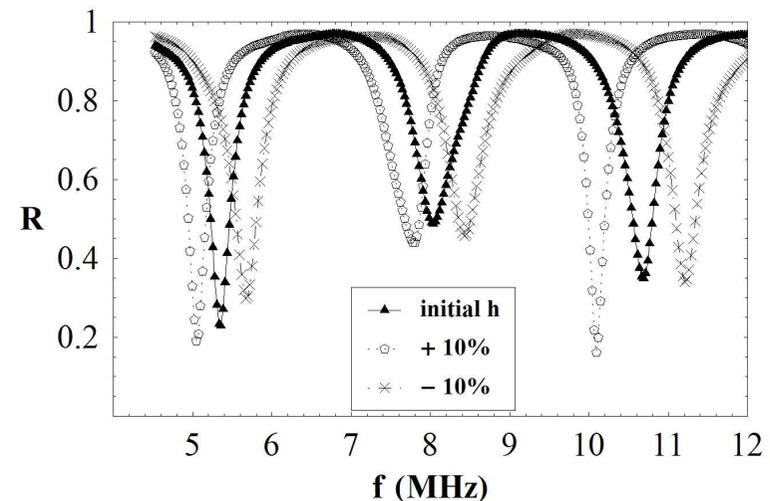
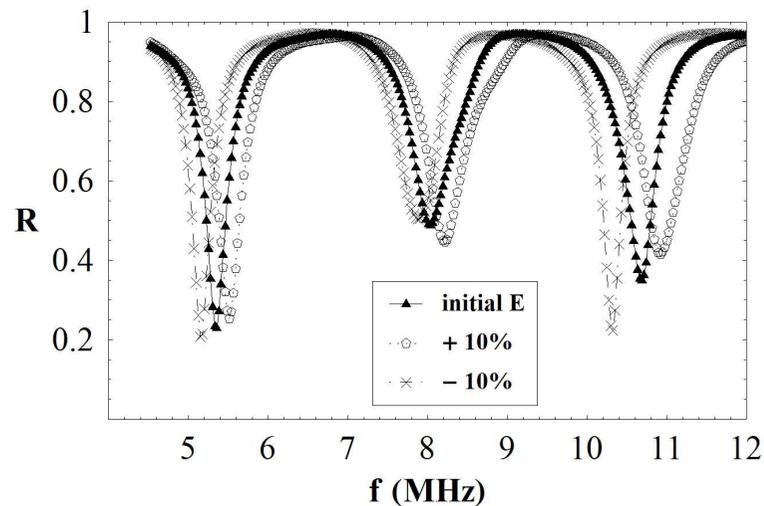


Modello doppio strato. Si usa il modello nella sua forma completa.



I grafici presentano minimi ripetuti, che dipendono dalle interferenze distruttive che si verifica quando si ha controfase fra le onde che interferiscono alla prima interfaccia. Materiali più cedevoli sono caratterizzati da minimi più frequenti.

⊕ Risultati numerici: strato intermedio in materiale polimerico



La dipendenza degli spettri da E e h è stata studiata. Hanno effetti opposti, in direzione e intensità. Il comportamento dei grafici può essere agevolmente giustificato considerando che una variazione positiva di h , come una diminuzione di E , portano entrambi ad un aumento del tempo impiegato per effettuare il cammino di fase da alcune delle onde che interferiscono alla prima interfaccia.

Conclusioni

- Affermazione della DM come una teoria effettivamente multiscala e multipurpose.
- Capacità di descrivere i fenomeni di propagazione in solidi eterogenei e discreti.
- Dipendenza della propagazione dai parametri η e λ , in modo accoppiato.
- Valore aggiunto della DM, ma necessità di essere critici nei confronti della teoria (i campi di applicabilità possono essere molteplici).
- Realizzazione di un modello che serva per l'identificazione strutturale dei tessuti.