

# Ciclo di lezioni sulla Doublet Mechanics (DM)

## Parte III

A Case Study:

*The Flamant Paradox*

(a point-like force applied on the free surface of an infinite half-plane)

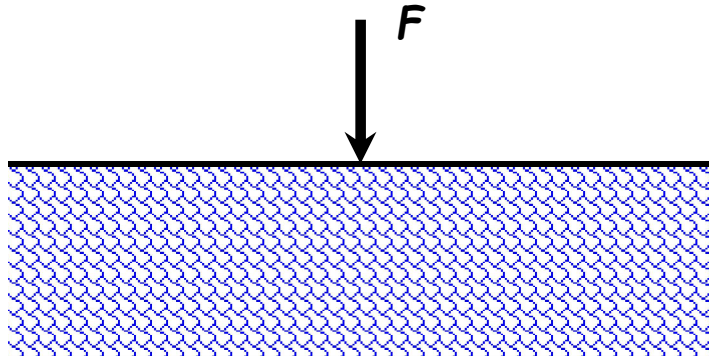
Nelle lezioni precedenti si sono dati i fondamenti della teoria, e si è studiato un caso particolare - a dynamic problem, è a dire la propagazione di onde elastiche piane in mezzi discreti. Ma la DM non è stata sviluppata per affrontare un solo caso particolare.

⊕ La DM è una *field theory* - di scala - estremamente flessibile.

DM - *outline e campi di applicabilità:*

- Viscoelasticità.
- Plasticità.
- Problemi al contorno, di tipo dinamico.
- Problemi al contorno, di tipo statico.
- Concentrazioni delle tensioni.
- Nuovi criteri di rottura.
- Meccanica della frattura.

Problema di Flamant



Il classico problema di **Flamant** si propone di individuare le tensioni che sono generate all'interno di un semi piano, infinito, sulla cui superficie libera si applichi localmente un carico puntiforme.

- ⊕ Il problema è detto di **Flamant**, perché la soluzione è stata data per la prima volta dallo scienziato francese, nel 1892<sup>I</sup>. Ovviamente nell'ambito della meccanica classica.
- ⊕ E al solito, se la soluzione descrive in modo ottimale materiali che soddisfano le ipotesi di continuità, manca nel prevedere situazioni particolari (ampiamente osservate sperimentalmente), tipiche di materiali discreti e granulari.
- ⊕ A parte la normale applicazione all'ingegneria biomedica, il problema risulta di fortissima attualità anche in campi quali, fra gli altri, la geomeccanica (e si pensi a tutte le problematiche legate alle *soil foundations*).

<sup>I</sup>Flamant, *Sur la repartition des pressions dans un solide rectangulaire chargé transversalement*, Comptes Rendus de l'Academie des Sciences Francaise, 114 pp. 1465-1468, (1892).

- ⊕ Ricavare una soluzione alternativa nell'ambito della DM, significa - ancora una volta - rimuovere alcune ipotesi che limitano il comportamento del mezzo in analisi. Significa, in altri termini, allargare il campo di applicabilità della teoria, includendo parametri che non sono normalmente contemplati da altri frameworks, quali la CM.
- ⊕ E cioè dei **parametri di scala**, che definiscono la microstruttura del materiale.
- ⊕ A dirla in modo allegorico, si aumentano i gradi libertà del sistema, lo si rende labile, capace di modellare e prevedere comportamenti inaccessibili ad altre teorie.

### E quindi?

Punti ed outline della presentazione  
(nelle prossime slide si vedrà come)

- Dedurre la soluzione classica, secondo l'approccio in *Elasticity* - J. R. Barber, 1992.
- Ricavare la soluzione DM.
- Confrontare approcci, soluzioni, risultati.
- Evidenziare le differenze.
- Quale teoria risulta in accordo con i dati sperimentali?

## ⊕ Funzione potenziale scalare

(formulazione delle tensioni in termini di un campo scalare)

- Nella meccanica Newtoniana, due masse interagiscono secondo una forza che è proporzionale a  $m_1 m_2 / r^2$ , e che si esercita lungo la congiungente i baricentri (e in modo istantaneo, la relatività non era stata ancora proposta!).
- Essenzialmente, la meccanica Newtoniana è una teoria vettoriale.
- Ma è possibile definire una **quantità scalare** - l'energia potenziale - di modo che le forze siano uguali a  $\mathbf{F} = -\nabla V$ .
- Un problema vettoriale è ricondotto ad uno scalare. In generale, è molto più facile maneggiare quantità scalari che non vettori, soprattutto perché uno scalare è invariante rispetto a trasformazioni di coordinate, mentre un vettore no.
- Sebbene l'energia potenziale abbia un significato fisico immediato - ed evidente, anche in altre situazioni è possibile riformulare un framework in termini di funzioni potenziali scalari.
- È il caso della **teoria dell'elasticità**, e delle **funzioni di Airy**.

## ⊕ Le funzioni di Airy

- La funzione scalare di Airy - **the Airy stress function** - è  $\phi$ .
- Le componenti del tensore delle tensioni possono essere derivate da  $\phi$ , attraverso semplici derivazioni, come:

$$\sigma_{xx} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}; \quad \sigma_{yy} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}; \quad \sigma_{xy} = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y};$$

- Si dimostra facilmente che l'equazione di equilibrio risulta automaticamente soddisfatta da  $\phi$ , nell'ipotesi che le forze di volume siano nulle.
- L'equazione di compatibilità assume invece la forma:

$$\nabla^4 \phi = 0; \quad \nabla^4 \text{ è l'operatore biarmonico.}$$

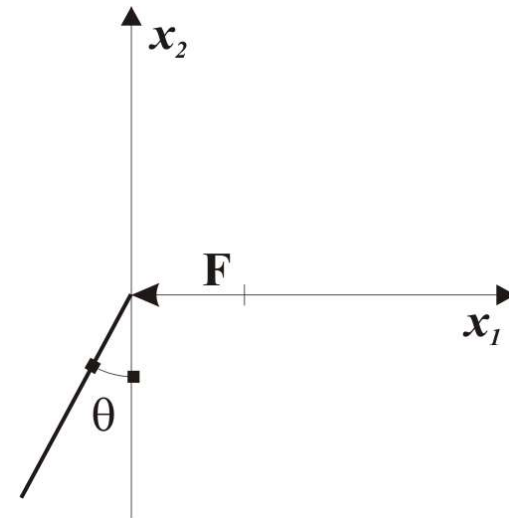
- La ragione principale per cui normalmente si preferiscono le funzioni di Airy ad altri potenziali scalari, è che con esse si possono rappresentare tutti gli stati tensionali che si generano in un corpo elastico.



Sir George Airy  
(1801-1892)

## ⊕ Il problema di Flamant nella CM

- Per come è definito, il problema di Flamant è un problema di contatto piano.
- Una sua caratteristica, è **l'auto similarità** (un concetto che interviene anche nella teoria dei frattali): la soluzione non possiede cioè alcuna lunghezza di scala caratteristica.
- È a dire che un ingrandimento (uno zoom) del campo di soluzione intorno all'apice risulta simile alla soluzione vista a scale normali - in altri termini, il tipo di soluzione, è simile a qualsiasi distanza dall'apice, e a qualsiasi scala si osservi il problema.
- **Ma già questa è una differenza contingente e fondamentale rispetto all'approccio DM!**
- Per comodità, si farà riferimento a coordinate polari (come in figura).



## ⊕ Il problema di Flamant nella CM

- Una conseguenza dell'auto similarità è che le tensioni indotte da  $F$  sono del tipo  $\sigma=f(r)g(\theta)$  (esprimibili per mezzo di variabili separate).
- E poiché l'area che trasmette la forza nel materiale è proporzionale al raggio  $r$  - si ricordi che questo è un problema piano - per ragioni di equilibrio,  $f(r)$  sarà del tipo  $f(r)=r^{-1}$ .
- All'interno di opportune tabelle, occorre scegliere per  $\phi$  tutti i termini che accuratamente derivati ritornano tensioni proporzionali ad  $r^{-1}$ . Si ottiene:

$$\phi = C_1 r \theta \sin \theta + C_2 r \theta \cos \theta + C_3 r \log r \cos \theta + C_4 r \log r \sin \theta$$

- $C_1, C_2, C_3$  e  $C_4$  sono costanti che si ottengono imponendo le condizioni al contorno al problema, in forma forte ( $\sigma_{\theta r}=\sigma_{\theta\theta}=0$ ). E ricorrendo a considerazioni generali di equilibrio.
- Si ottiene infine la soluzione di Flamant, restituita dalla sola componente radiale:

$$\sigma_r = -\frac{2F}{\pi r} \sin \theta$$

Cui normalmente si fa riferimento come ad una distribuzione radiale semplice.



⊕ **La distribuzione radiale semplice**  $\sigma_r = -\frac{2F}{\pi r} \sin\theta$

- Le tensioni sono indotte solo in direzione radiale (che è direzione principale).
- Il campo di tensioni è esclusivamente compressivo.
- Non dipende da alcun parametro di scala, o microstrutturale, del materiale.
- Interessante esprimere le tensioni in coordinate cartesiane.
- E scrivere l'espressione del campo degli spostamenti (ancora in coordinate cartesiane - la soluzione in termini di spostamenti sarà molto importante nella successiva analisi DM -  $\lambda' := 2\lambda\mu/(\lambda+2\mu)$  è una composizione delle costanti di Lamè):

$$\sigma_{11} = \frac{2x_1^3 F}{\pi(x_1^2 + x_2^2)^2}$$

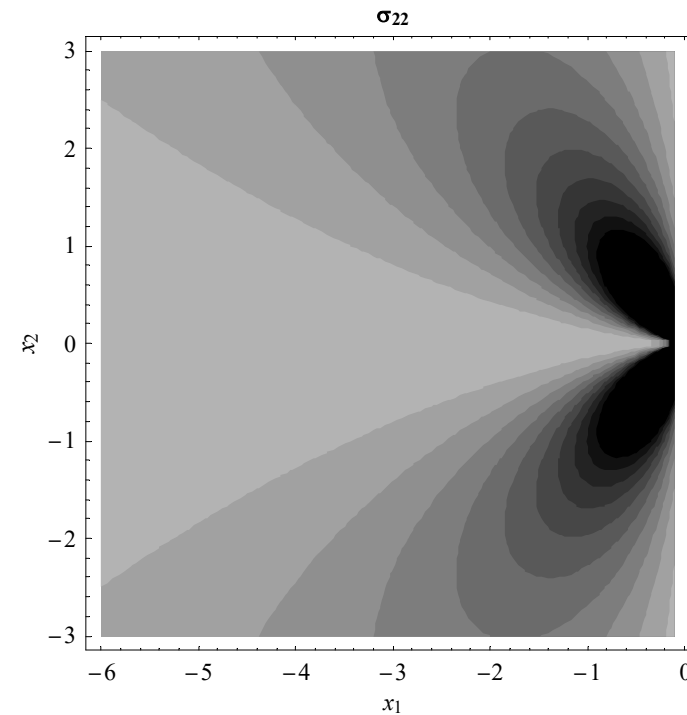
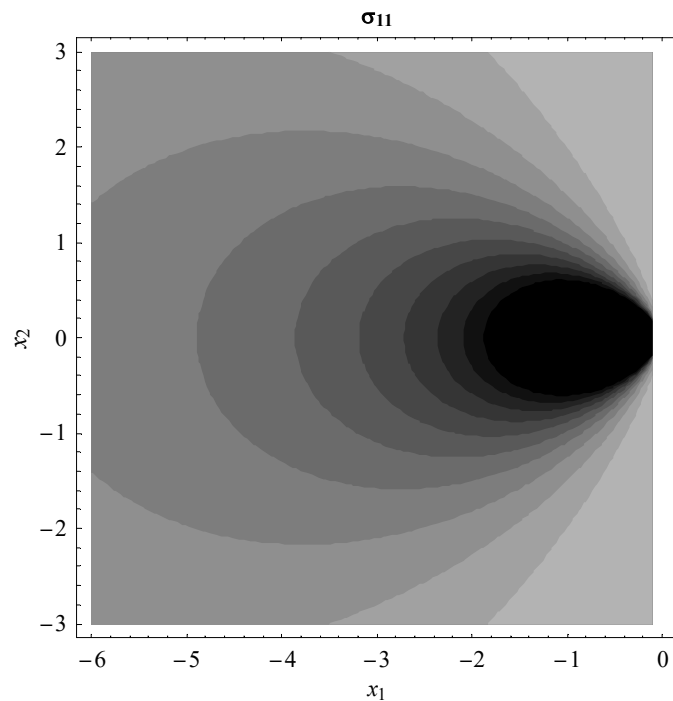
$$\sigma_{22} = \frac{x_1 x_2^2 F}{\pi(x_1^2 + x_2^2)^2}$$

$$u_1 = -\frac{F}{2\pi\mu} \left[ \frac{\lambda'+2\mu}{2(\lambda'+\mu)} \left( \log(x_1^2 + x_2^2) - \frac{x_1^2}{x_1^2 + x_2^2} \right) \right]$$

$$u_2 = \frac{F}{2\pi\mu} \left[ \frac{\mu}{\lambda'+\mu} \left( \text{ArcTan} \left( -\frac{x_2}{x_1} - \frac{\pi}{2} \right) + \frac{x_1 x_2}{x_1^2 + x_2^2} \right) \right]$$

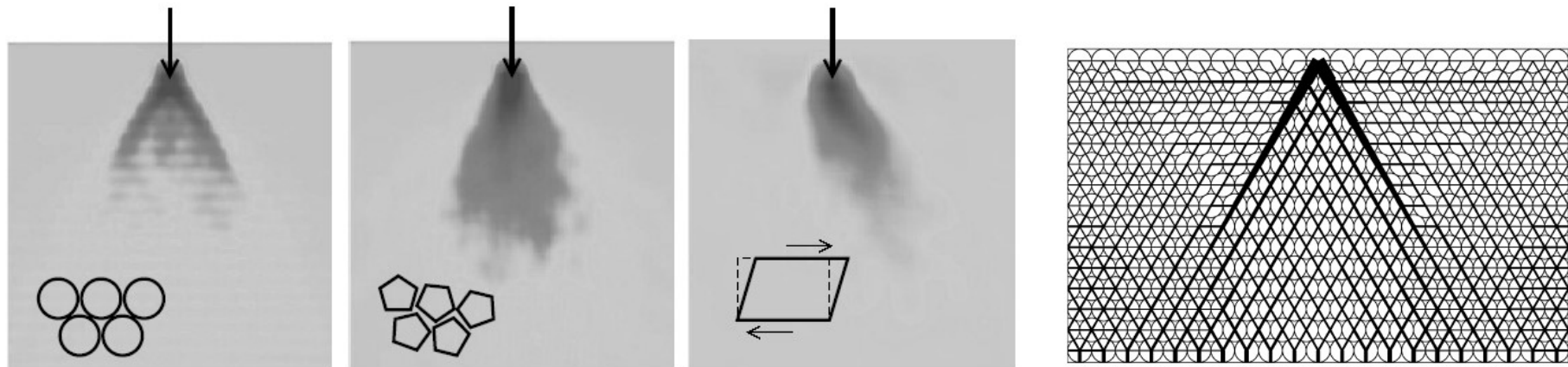
## ⊕ La distribuzione radiale semplice

- Si può effettuare un Contour Plot dei risultati.
- Si nota immediatamente come le  $\sigma_{11}$  siano contraddistinte da un unico lobo centrale, che va via via allargandosi.



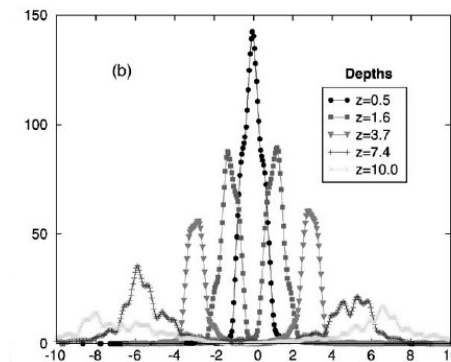
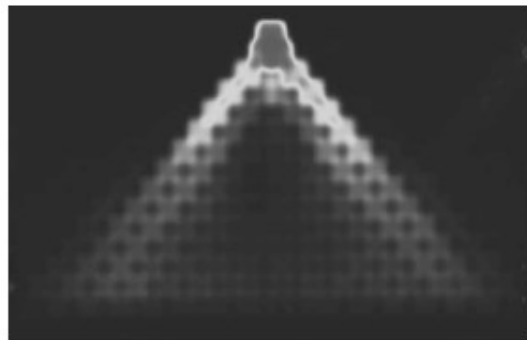
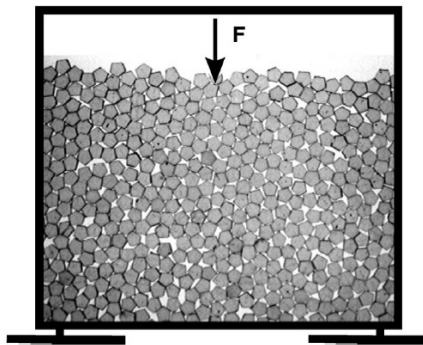
## ⊕ E se il solido fosse discreto?

- Questa dunque la soluzione. Ci si chiede se funziona.
- Funziona se il mezzo è continuo (e questo tipo di soluzione, generalizzato, porta infatti a tutta la teoria dei contatti Hertziani, che si usano, fra l'altro, per dimensionare le ruote dentate).
- Ma se il solido fosse discreto (Sand assemblies, tessuti biologici)?



Quando un carico puntiforme è applicato ad un mezzo granulare, si osservano **sperimentalmente** i seguenti fenomeni:

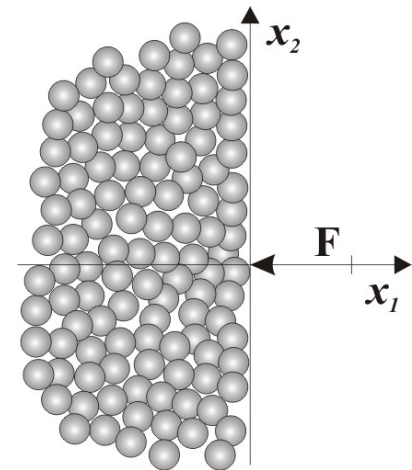
- ⊕ La distribuzione di tensioni lungo due direzioni preferenziali, due lobi laterali (dei pressure peaks).
- ⊕ La nascita di una rete di Force Chains (casuale).
- ⊕ Un pressure dip immediatamente sotto la zona di applicazione del carico.
- ⊕ In generale, questi comportamenti dipendono dall'organizzazione dei grani nello spazio.



⊕ Sembra naturale applicare al problema la teoria della Doublets Mechanics.

Impostazione del problema - **necessità di definire:**

- Il tipo di interazioni fra i doublets [1].
- La termodinamica associata al problema [2].
- La distanza internodale  $\eta$  [3].
- La configurazione nello spazio dei doublets [4].
- L'approssimazione di scala ( $M$ ) [5].



⊕ [1] Il tipo di interazione.

Si assume che il legame costitutivo che definisce i doublets sia elastico-lineare, e che le interazioni siano centrali e locali:

$A_{\alpha\beta} \rightarrow A_0$  Per cui si ha una sola micro costante di elasticità

⊕ [2] La termodinamica.

Si assume che al problema non sia associata nessuna variazione di temperatura:  
 $\Theta = \Delta T = 0$ .

Gli effetti termici si considerano trascurabili

⊕ [3] La distanza internodale.

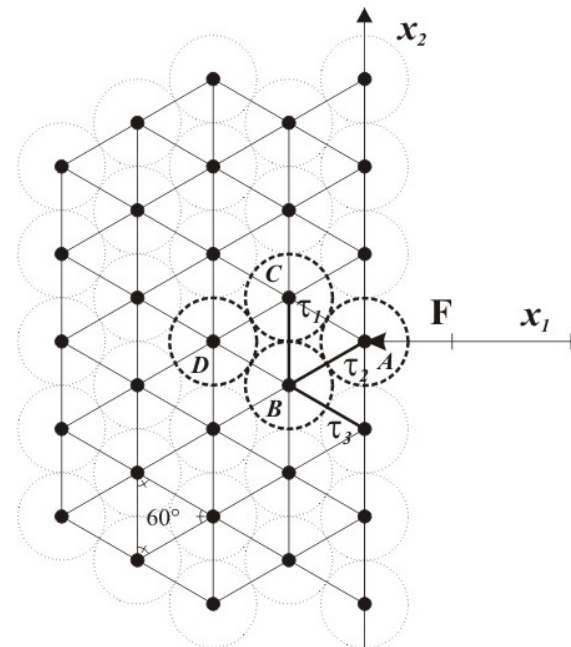
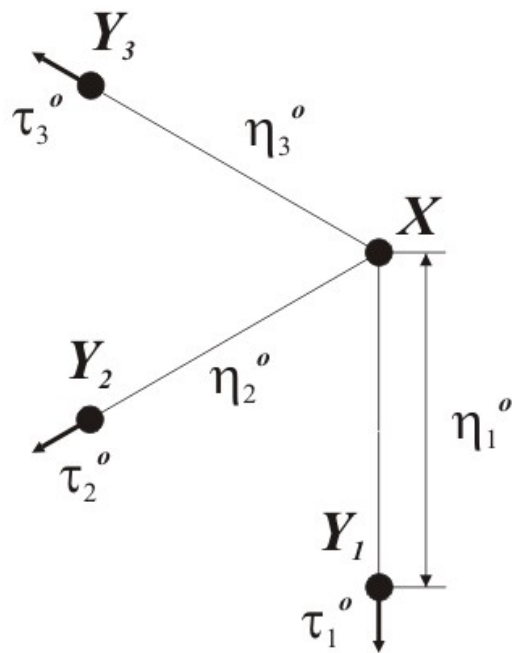
L'ipotesi che si fa, è che la distribuzione delle distanze internodali nel dominio sia restituita da una esponenziale molto stretta, che al limite può essere rappresentata da una delta di Dirac.

È a dire che:

$\eta_\alpha = \eta \quad \forall \alpha \in [1, \dots, n]$     Le distanze fra i grani sono uguali in ogni direzione

⊕ [4] La configurazione dei doublets.

Per un veloce confronto con altri modelli - semi numerici - presenti in letteratura, si sceglie una configurazione dei doublets tale da riempire il piano (si sta infatti affrontando un problema piano) secondo un [Hexagonal Packing](#).



⊕ [5] L'ordine di approssimazione (M).

Si sceglie il primo ordine di approssimazione utile a rendere la DM una teoria completa ed effettivamente di scala.

È a dire  $M=2$ .

⊕ Siamo pronti ad operare sull'equazione di equilibrio della DM, alle forze:

$$\sum_{\alpha=1}^n \sum_{\chi=1}^M (-1)^{\chi-1} \frac{(\eta_{\alpha})^{\chi-1}}{\chi!} \tau_{\alpha k_1}^0 \dots \tau_{\alpha k_{\chi}}^0 \frac{\partial^{\chi} (\tau_{\alpha i} + p_{\alpha i})}{\partial x_{k_1} \dots \partial x_{k_{\chi}}} - F_i = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}$$

$\tau_{\alpha i} = 0$  Nell'ipotesi di interazioni centrali

F<sub>i</sub> = 0

Si considerano nulle le forze di volume



$$\sum_{\alpha=1}^n \sum_{\chi=1}^M (-1)^{\chi-1} \frac{(\eta_{\alpha})^{\chi-1}}{\chi!} \tau_{\alpha k_1}^0 \dots \tau_{\alpha k_{\chi}}^0 \frac{\partial^{\chi} (\mathbf{t}_{\alpha i} + \mathbf{p}_{\alpha i})}{\partial \mathbf{x}_{k_1} \dots \partial \mathbf{x}_{k_{\chi}}} = \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}_i}{\partial \mathbf{t}^2} = 0$$

Perché è un problema di statica!

$$\sum_{\alpha=1}^n \sum_{\chi=1}^M (-1)^{\chi-1} \frac{(\eta_{\alpha})^{\chi-1}}{\chi!} \tau_{\alpha k_1}^0 \dots \tau_{\alpha k_{\chi}}^0 \frac{\partial^{\chi} \mathbf{p}_{\alpha i}}{\partial \mathbf{x}_{k_1} \dots \partial \mathbf{x}_{k_{\chi}}} = \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}_i}{\partial \mathbf{t}^2}$$

$$+ \quad \mathbf{p}_{\alpha i} = \mathbf{A}_0 \boldsymbol{\varepsilon}_{\alpha i}$$

Segue dall'ipotesi di interazioni centrali e locali

$$\mathbf{A}_0 \sum_{\alpha=1}^n \tau_{\alpha i}^0 \tau_{\alpha j}^0 \sum_{\delta=2,4,\dots}^{2M} \frac{(\eta_{\alpha})^{\delta-2}}{\delta!} \tau_{\alpha k_1}^0 \dots \tau_{\alpha k_{\delta}}^0 \frac{\partial^{\delta} \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}_{k_1} \dots \partial \mathbf{x}_{k_{\delta}}} = 0$$

$$A_0 \sum_{\alpha=1}^n \tau_{\alpha i}^0 \tau_{\alpha j}^0 \sum_{\delta=2,4,\dots}^{2M} \frac{(\eta_\alpha)^{\delta-2}}{\delta!} \tau_{\alpha k_1}^0 \dots \tau_{\alpha k_\delta}^0 \frac{\partial^\delta \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}_{k_1} \dots \partial \mathbf{x}_{k_\delta}} = 0 + \begin{cases} M = 2 \\ \eta_\alpha = \eta \quad \forall \alpha \in [1, \dots, n] \end{cases}$$

$$A_0 \sum_{\alpha=1}^n \tau_{\alpha i}^0 \tau_{\alpha j}^0 \tau_{\alpha k}^0 \tau_{\alpha l}^0 \left( \frac{1}{2!} \mathbf{u}_{j,kl} + \frac{\eta^2}{4!} \tau_{\alpha p}^0 \tau_{\alpha q}^0 \mathbf{u}_{j,klpq} \right) = 0$$

Corrispondono (1)  
all'approssimazione di scala, (2)  
all'ipotesi sulle distanze  
internodali

È l'equazione di equilibrio finale, ottenuta facendo uso di tutte le congetture e le ipotesi fatte sulla geometria e sulla configurazione microstrutturale del sistema.

- ⊕ Considerazioni simili portano a riformulare la condizione al contorno alle forze (di cui abbiamo necessariamente bisogno, essendo questo uno static boundary problem).

$$A_0 \eta_1 \sum_{\alpha=1}^n \tau_{\alpha l}^0 \tau_{\alpha i}^0 \tau_{\alpha j}^0 \tau_{\alpha k_1}^0 \left( u_{j,k_1} - \frac{\eta^2}{4} \tau_{\alpha k_2}^0 \tau_{\alpha k_3}^0 u_{j,k_1 k_2 k_3} \right) = T_i$$

Equazione C.C. alle forze

- ⊕ Nelle equazioni,  $T$  è il carico applicato, mentre  $u$  corrisponde al campo di spostamento.
- ⊕ Per risolvere il problema, si assume quindi che queste quantità siano sviluppabili attraverso serie di potenze

$$T = T^{(0)} + \eta T^{(1)} + \eta^2 T^{(2)}$$

$$u = v + \eta z + \eta^2 w$$

Combinando insieme queste espansioni in serie, e le equazioni di governo della DM, si ottengono due ulteriori sistemi di:

$$\begin{aligned}
 A_0 \sum_{\alpha=1}^n \tau_{\alpha i}^0 \tau_{\alpha j}^0 \tau_{\alpha k}^0 \tau_{\alpha l}^0 v_{j,kl} &= 0 \\
 A_0 \sum_{\alpha=1}^n \tau_{\alpha i}^0 \tau_{\alpha j}^0 \tau_{\alpha k}^0 \tau_{\alpha l}^0 z_{j,kl} &= 0 \\
 A_0 \sum_{\alpha=1}^n \tau_{\alpha i}^0 \tau_{\alpha j}^0 \tau_{\alpha k}^0 \tau_{\alpha l}^0 \left( w_{j,kl} + \frac{1}{12} \tau_{\alpha p}^0 \tau_{\alpha q}^0 v_{j,klpq} \right) &= 0
 \end{aligned}$$

⊕ 3 Equazioni di Equilibrio.

$$\begin{aligned}
 A_0 n_l \sum_{\alpha=1}^n \tau_{\alpha l}^0 \tau_{\alpha i}^0 \tau_{\alpha j}^0 \tau_{\alpha k}^0 v_{j,k} &= T_i^{(0)} \\
 A_0 n_l \sum_{\alpha=1}^n \tau_{\alpha l}^0 \tau_{\alpha i}^0 \tau_{\alpha j}^0 \tau_{\alpha k}^0 z_{j,k} &= T_i^{(1)} \\
 A_0 n_l \sum_{\alpha=1}^n \tau_{\alpha l}^0 \tau_{\alpha i}^0 \tau_{\alpha j}^0 \tau_{\alpha k}^0 \left( w_{j,k} - \frac{1}{4} \tau_{\alpha p}^0 \tau_{\alpha q}^0 v_{j,kpq} \right) &= T_i^{(2)}
 \end{aligned}$$

⊕ 3 C.C.

Per il particolare tipo di problema in analisi, si ha subito:

$$\oplus \quad \mathbf{T}^{(1)} = \mathbf{T}^{(2)} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{T}^{(0)} = \mathbf{F} \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} A_0 \sum_{\alpha=1}^n \tau_{\alpha i}^0 \tau_{\alpha j}^0 \tau_{\alpha k}^0 \tau_{\alpha l}^0 z_{j,kl} = 0 \\ A_0 n_l \sum_{\alpha=1}^n \tau_{\alpha l}^0 \tau_{\alpha i}^0 \tau_{\alpha j}^0 \tau_{\alpha k}^0 z_{j,k} = 0 \end{array} \right.$$

È un problema lineare omogeneo, con condizione al contorno nulle, si ottiene la soluzione banale  $\mathbf{z} \equiv \mathbf{0}$

$$\left\{ \begin{array}{l} A_0 \sum_{\alpha=1}^n \tau_{\alpha i}^0 \tau_{\alpha j}^0 \tau_{\alpha k}^0 \tau_{\alpha l}^0 v_{j,kl} = 0 \\ A_0 n_l \sum_{\alpha=1}^n \tau_{\alpha l}^0 \tau_{\alpha i}^0 \tau_{\alpha j}^0 \tau_{\alpha k}^0 v_{j,k} = F \end{array} \right.$$

Coincide con il problema di Flamant classico, la soluzione per lo spostamento  $\mathbf{v}$  è uguale a quella trovata nell'analisi di Barber  $\Rightarrow \mathbf{v} \equiv \mathbf{v}^{FL} / \{\lambda = \mu = 3/8 A_0\}$

- ⊕ Il problema si riduce a trovare la componente di spostamento  $w$ :

$$A_0 \sum_{\alpha=1}^n \tau_{\alpha i}^0 \tau_{\alpha j}^0 \tau_{\alpha k}^0 \tau_{\alpha l}^0 w_{j,kl} = -\frac{A_0}{12} \sum_{\alpha=1}^n \tau_{\alpha i}^0 \tau_{\alpha j}^0 \tau_{\alpha k}^0 \tau_{\alpha l}^0 \tau_{\alpha p}^0 \tau_{\alpha q}^0 v_{j,klpq} = -G_i$$

$G_i$  è un body force term

- ⊕ Per questo, si ricorre alle funzioni potenziale di Papkovitch-Neuber -  $\Phi$  e  $\Psi_i$  -

Quando queste funzioni potenziali soddisfano alle seguenti relazioni differenziali in termini delle body force terms, allora il campo  $w$  è subito restituito da:

E si noti come la soluzione di ordine inferiore serva a ricavare il campo di spostamenti finale (in analogia con il metodo delle approssimazioni successive di Signorelli).

$$\left\{ \begin{array}{l} \Phi_{,jj} = -\frac{2}{3} x_j G_j \\ \Psi_{i,jj} = \frac{2}{3} G_i \end{array} \right. \Rightarrow$$

$$w_i = \frac{4}{3A_0} (\Phi_{,i} + x_j \Psi_{j,i} - 2\Psi_i)$$


⊕ E quindi:

$$\mathbf{w} \longrightarrow \mathbf{u}^{\text{DM}} = \mathbf{v} + \eta^2 \mathbf{w}$$


Trovata una soluzione particolare per lo spostamento  $\mathbf{u}^{\text{DM}}$ , le macro tensioni sono derivate in modo convenzionale come:

$$\sigma_{11} = \frac{2x_1^3 F}{\pi(x_1^2 + x_2^2)^2} + \eta^2 \frac{(41x_1^8 - 270x_1^6 x_2^2 + 84x_1^4 x_2^4 - 266x_1^2 x_2^6 - 21x_2^8) F}{9\pi(x_1^2 + x_2^2)^6}$$

$$\sigma_{22} = \frac{x_1 x_2^2 F}{\pi(x_1^2 + x_2^2)^2} + \eta^2 x_1 \frac{(17x_1^8 - 126x_1^6 x_2^2 + 132x_1^4 x_2^4 - 314x_1^2 x_2^6 + 51x_2^8) F}{9\pi(x_1^2 + x_2^2)^6}$$



M=1



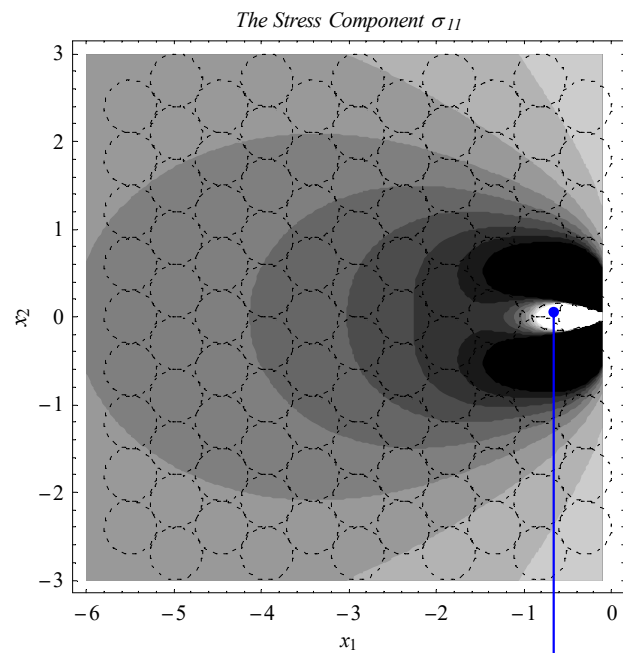
M=2

E se volessimo fare qualche considerazione?

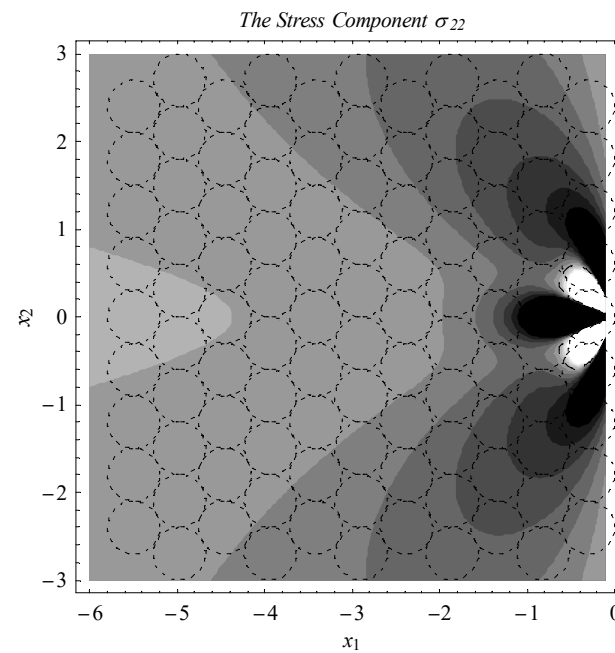
- ⊕ La soluzione si compone di due termini, il primo coincide con la soluzione classica di Flamant. Il secondo è una sorta di termine correttivo, proprio della DM.
- ⊕ Che risulta pesato attraverso il quadrato della distanza internodale  $\eta$ , al solito i parametri microstrutturali intervengono al secondo ordine di approssimazione  $M=2$ .
- ⊕ Se  $\eta=0$ , la soluzione si riduce a quella classica di Flamant, è a dire che non ci sono effetti discreti (come è logico che sia, la distanza fra le particelle tendendo a zero, e il medium al limite continuo).
- ⊕ Il primo e il secondo termine della soluzione sono proporzionali a potenze diverse del raggio  $r$ . In particolare, il primo termine è più persistente del secondo nello spazio.
- ⊕ In altri termini, anche se gli effetti discreti non sono trascurabili, questi sono tanto più accentuati quanto più si è vicino all'apice. A una certa distanza dal punto di applicazione della forza, si fanno trascurabili rispetto alla soluzione classica.
- ⊕ Questo comportamento è completamente diverso rispetto a quello previsto dalla teoria classica, e dall'ipotesi di auto similarità (ricordate?).



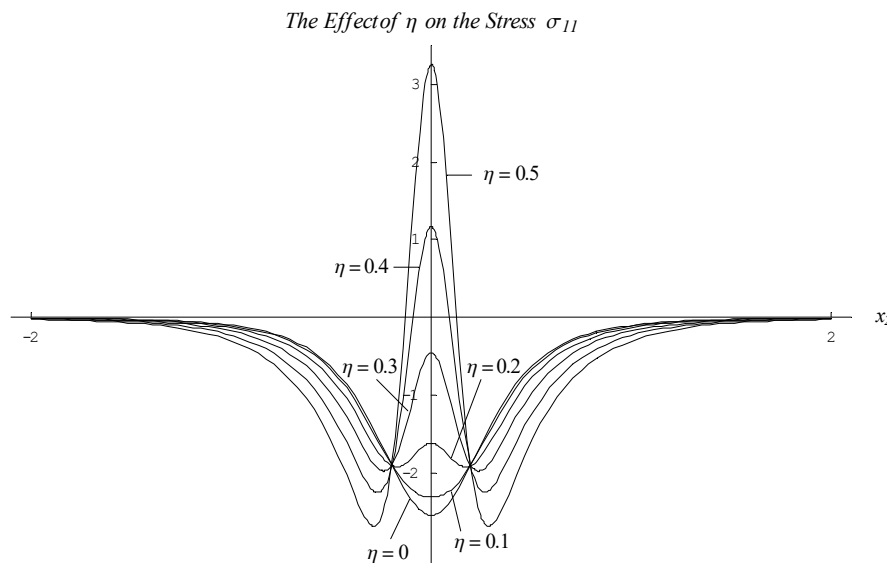
- ⊕ Ma sono decisamente più significativi i contourplot della soluzione, da cui si evince subito come la DM theory riesca a prevedere una zona di pressure dip immediatamente sotto la zona di applicazione del carico.



Previsione di una  
pressure dip area

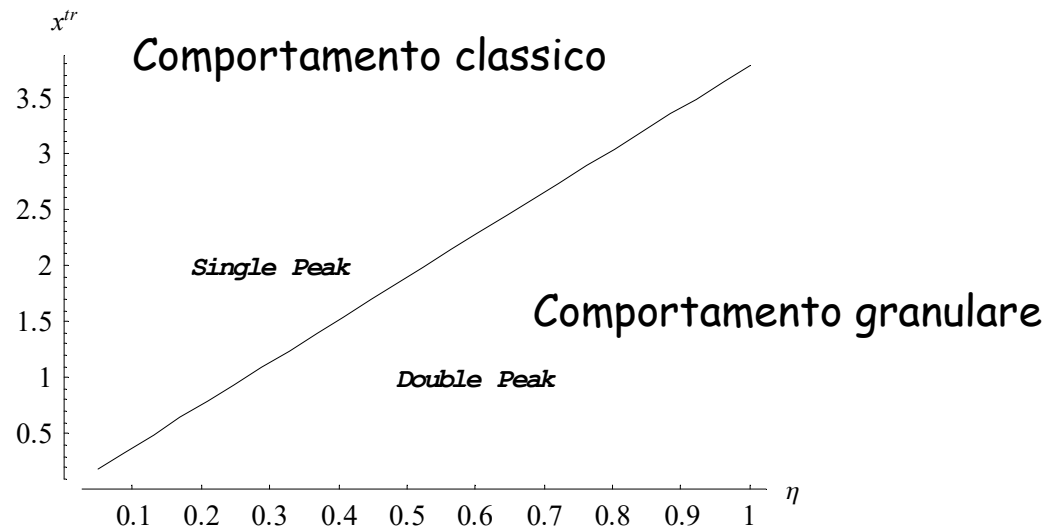


- ⊕ E il risultato, per certi versi sorprendente, è tanto più evidente se si visualizza il contourplot della soluzione, ad una certa profondità  $x_1$ .

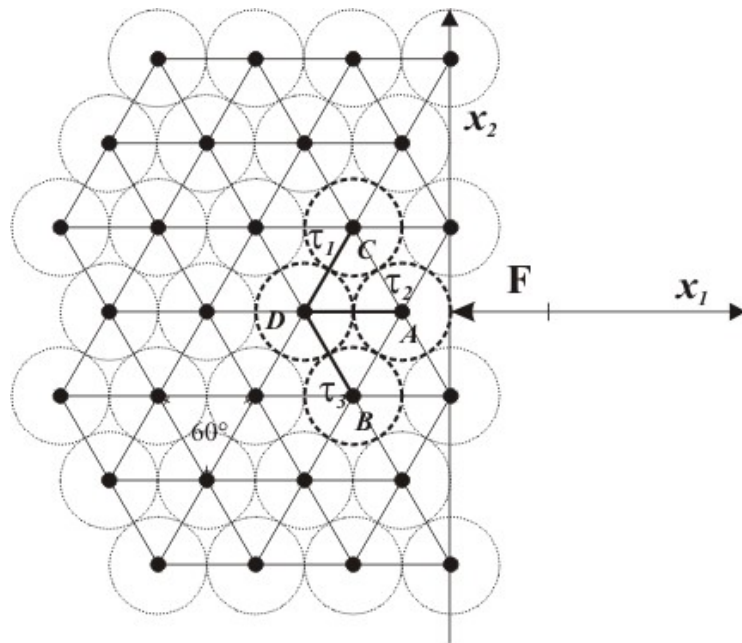


Ci sono valori di  $\eta$ , parametro nel plot, per il quale le tensioni risultano addirittura positive. Questo è dovuto alle interazioni fra le particelle che sono bilaterali (quando invece nei grain assemblies sono normalmente unilaterali).

- ⊕ Esiste, per ogni valore di  $\eta$ , un corrispondente valore di profondità  $x^{tr}$  (distanza dal vertice), superato il quale il comportamento del materiale ritorna classico.
- ⊕ La discriminante è la scomparsa dei due picchi dalla soluzione per  $\sigma_{11}$ .
- ⊕  $X^{tr}$  è una indicazione di quanto la soluzione non classica caratterizzi il mezzo granulare. Ed è lineare con  $\eta$ .

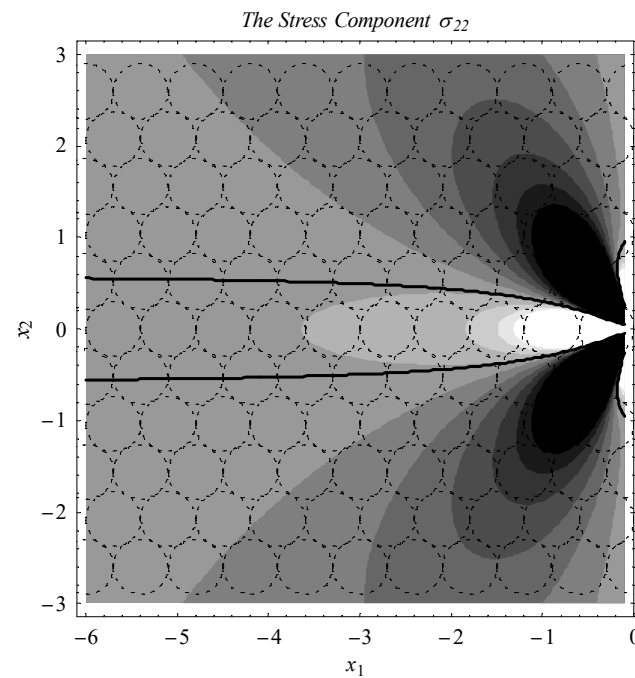
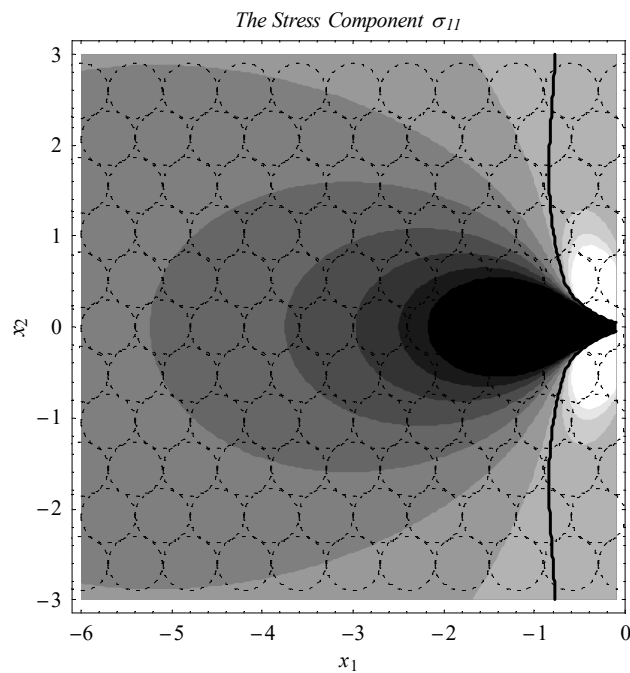


- ⊕ La soluzione trovata è caratteristica di una particolare configurazione dei nodi nel piano.

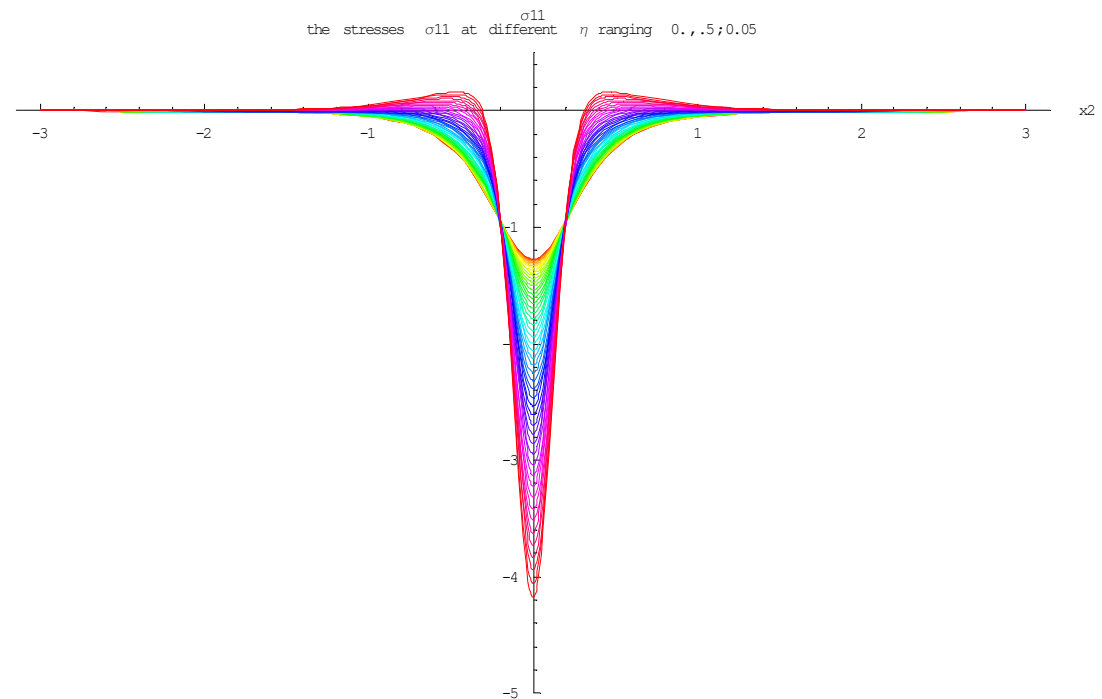
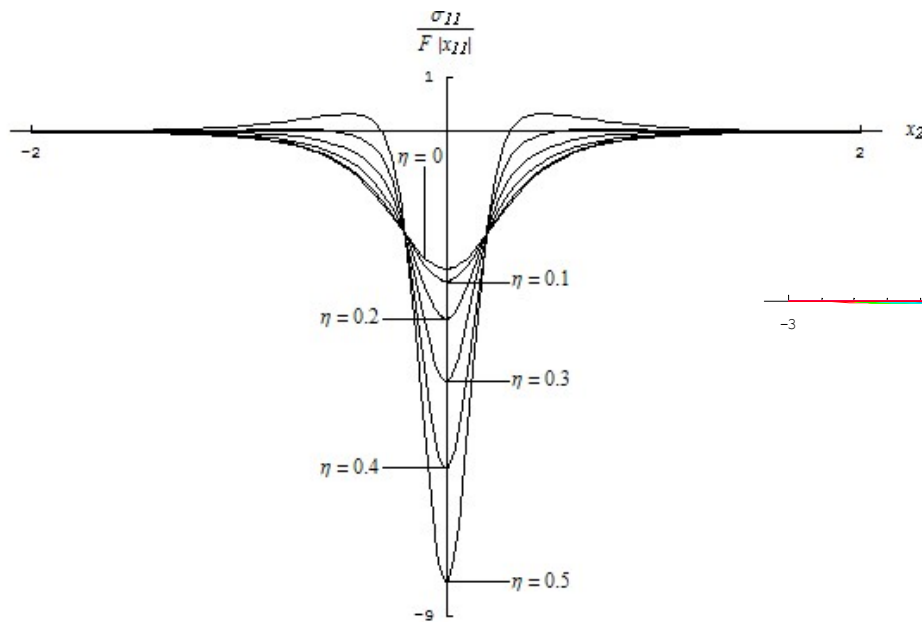


- ⊕ Si è già osservato, sperimentalmente, che diversi arrangiamenti dei grains nel dominio portano a stati tensionali diversi.
- ⊕ Si può simulare questo comportamento con la DM?
- ⊕ Basta scegliere altri vettori  $\tau$ , in modo da formare un **reticolo differente dal precedente**, che chiameremo un *diamond packing*.
- ⊕ E ripetere l'analisi, come per l'*hexagonal packing*.
- ⊕ Alla fine si ottiene uno stato tensionale originale, per il quale si mostreranno solo i plot.

- ⊕ Il campo tensionale ottenuto è effettivamente diverso da quello relativo all'*hexagonal packing*.
- ⊕ La soluzione può essere in parte interpretata - e in questo senso ampiamente giustificata - per mezzo di semplici considerazioni geometriche.



- ⊕ Ancora, il plot delle  $\sigma_{11}$  ad una certa profondità  $x_1$  (volevamo stupirvi con effetti speciali...).



- ⊕ Ancora, la traccia del valore di profondità di transizione  $x^{tr}$ , superato il quale il comportamento del materiale risulta classico.
- ⊕ L'andamento è simile al precedente, ma la pendenza diversa.

